ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

Математически анализ 2

Йорданка Панева-Коновска

София, 2017

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

Математически анализ 2

Йорданка Панева-Коновска

София, 2017

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор

Книгата е учебник, предназначен за студентите от Факултета по приложна математика и информатика (ФПМИ), ОКС "бакалавър". Той обхваща материала от дисциплината "Математически анализ 2", която се изучава от специалност "Приложна математика и информатика" през втория семестър на обучението. Може да се използва и от студентите на всички останали факултети на ТУ–София, както и от други студенти, които изучават този материал, а също така от всеки, който желае да обогати знанията си в областта на математиката и приложението ѝ във физиката и инженерните науки.

В учебника са застъпени разделите "Диференциално и интегрално смятане за функции на две и повече променливи", "Двоен, троен, криволинеен и повърхнинен интеграл", както и техните приложения.

Всяка тема включва необходимия теоретичен материал. Дадени са доказателства на голяма част от твърденията, но поради ограничения брой страници част от тях са пропуснати. Изложеният материал е подкрепен с много примери, които несъмнено способстват за по-пълното му и задълбочено усвояване и осмисляне на математическите факти. Материалът е онагледен с 2D и 3D графики, генерирани с използване на Системата за компютърна алгебра Maple 13, като част от тях са обработени допълнително и с Adobe Illustrator CS3. Всичко това е направено с цел да се постигне по-голяма достъпност и яснота на изложението.

Всички формулирани и доказани в учебника леми и теореми са номерирани с три числа. Първото означава номера на главата, второто е номерът на секцията, а третото е поредният номер вътре в самата секция, като номерацията е отделна за лемите и теоремите. Номерацията на забележките, дефинициите и формулите следва същия принцип.

Изложеният учебен материал е структуриран в шест глави.

Първа глава има в известен смисъл подготвителен характер. В нея се разглеждат някои важни неравенства, които се използват в по-нататъшното изложение, и се дават основни дефиниции и факти, свързани с пространството $\mathbb{R}^m$.

Във втора глава се изучават функции на много променливи. Тя е изцяло посветена на двете основни понятия на анализа – граница и непрекъснатост.

В трета глава е отделено внимание на диференцируемост на функции на много променливи, както явни, така и неявни.

В четвърта глава е застъпено изучаването на различните видове екстремуми на функции на много променливи – локални, условни, глобални.

Пета глава започва с изучаване на мярката в $\mathbb{R}^m$ и продължава с дефиниция, свойства и приложение на многократни интеграли.

Последната, шеста глава се отнася за криволинейни и повърхнинни интеграли и също включва техните дефиниции, свойства и приложения.

Благодарности. Авторът използва възможността да изкаже своята благодарност на гл. ас. Т. Станчева за неоценимата помощ при текстообработката на голяма част от книгата.

Йорданка Панева-Коновска, доц. д-р

Факултет по приложна математика и информатика, Технически университет – София,

Институт по математика и информатика на Българска академия на науките.

Глава 1

Пространството $\mathbb{R}^m$

1.1 Няколко важни неравенства

Да започнем изложението с неравенството на Коши–Шварц. Нека a_k и b_k $(k = 1, 2, \dots m)$ са реални числа и $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.1.1 (Неравенство на Коши-Шварц) *В сила е следното неравенство:*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2\right). \tag{1.1.1}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални, т.е. съществува такова реално число λ_0, че $b_k = \lambda_0 a_k$ за всички стойности на $k = 1, 2, \dots m$.

Доказателство. За да докажем верността на (1.1.1), се възползваме от неравенството:

$$\sum_{k=1}^{m} (a_k t + b_k)^2 \geqq 0, \tag{1.1.2}$$

което е тривиално изпълнено за $\forall t \in \mathbb{R}$ и $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Последното неравенство води до

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right) t^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right) t + \sum_{k=1}^{m} b_k^2 \geq 0,\ \forall t,$$

което означава, че дискриминантата $D \leqq 0$. Но тогава

$$\widetilde{D} = \frac{D}{4} = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2\right) \leqq 0,$$

откъдето исканото неравенство автоматично следва. Равенство, както се вижда от (1.1.2), е възможно единствено за такова t_0, за което $a_k t_0 + b_k = 0$ за всички разглеждани стойности на k. Доказателството на (1.1.1) завършва, вземайки $\lambda_0 = -t_0$. $\square$

Забележка 1.1.1 Неравенството (1.1.1) може да се запише и в следната еквивалентна форма:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}, \tag{1.1.3}$$

получена от (1.1.1) след коренуване.

Друго интересно неравенство, което е частен случай на известното неравенство на Минковски, е дадено по-долу.

Теорема 1.1.2 (Неравенство на Минковски) *В сила е следното неравенство:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k + b_k)^2} \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}. \tag{1.1.4}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални.

Доказателство. Отчитайки (1.1.3), сумата под квадратния корен в лявата страна на (1.1.4) се представя последователно, както следва:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{m} a_k^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k^2 + 2\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \\
&\leqq \sum_{k=1}^{m} a_k^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2} \\
&= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}\right)^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}.
\end{aligned}$$

Това води до неравенството:

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^2 \leqq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{m}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{m}b_k^2}\right)^2,$$

откъдето непосредствено следва (1.1.4). □

Забележка 1.1.2 В общия случай неравенството на Минковски има следния вид:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{m}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1). \tag{1.1.5}$$

Равенство се достига само когато a_k и b_k са пропорционални. Неговото доказателство тук няма да излагаме, тъй като за по-нататъшното изложение е достатъчен само случаят $p = 2$, даден с (1.1.4).

Теорема 1.1.3 *В сила е следното неравенство:*

$$|\ a_k - b_k\ | \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k-b_k)^2} \leqq \sum_{k=1}^{m}|\ a_k-b_k\ |, \tag{1.1.6}$$

за всяко $k = 1, 2, \ldots m$.

Доказателство. Резултатът автоматично следва от веригата релации подолу:

$$|\ a_k-b_k\ |^2 \leqq \sum_{k=1}^{m}(a_k-b_k)^2 = \sum_{k=1}^{m}|\ a_k-b_k\ |^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{m}|\ a_k-b_k\ |\right)^2$$

след кореnуване. □

1.2 Видове крайномерни линейни пространства

Нека L е линейно (векторно) пространство над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа. В него има въведени две операции – събиране и умножение с число. По-конкретно:

$$\begin{array}{ll} 1) & x, y \in L \Rightarrow z = x + y \in L \\ 2) & x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \lambda x \in L. \end{array}$$

Дефиниция 1.2.1 *Крайномерното пространството L се нарича евклидово, ако в него е въведено скаларно произведение, т.е. за всеки два елемента $x, y \in L$ е съпоставено реално число (x, y), удовлетворяващо свойствата линейност, симетричност и положителна определеност:*

$$\begin{array}{ll} 1) & x, y, z \in L, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+y, z) = (x, z) + (y, z); \quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \\ 2) & x, y \in L \Rightarrow (x, y) = (y, x) \\ 3) & x \in L, x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0. \end{array}$$

Дефиниция 1.2.2 *Пространството L се нарича метрично, ако в него е въведено разстояние (метрика) ρ, т.е. за всеки два елемента $x, y \in L$ е съпоставено неотрицателно число $\rho \geq 0$ със следните свойства:*

$$\begin{array}{ll} 1) & \rho(x, x) = 0;\ \rho(x, y) > 0, x \neq y \\ 2) & \rho(x, y) = \rho(y, x) \\ 3) & \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z),\ \forall x, y, z \in L. \end{array}$$

Метричното пространство L с метрика ρ се означава с (L, ρ).

Дефиниция 1.2.3 *Пространството L се нарича нормирано, ако в него е въведена норма $\| \,.\, \|$, т.е. $\| \,.\, \|$: $L \to \mathbb{R}_0^+$ със свойствата:*

$$\begin{array}{ll} 1) & x = 0 \Rightarrow \| x \| = 0;\ x \neq 0 \Rightarrow \| x \| > 0 \\ 2) & x \in L, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \| \lambda x \| = | \lambda | \| x \| \\ 3) & x, y \in L \Rightarrow \| x + y \| \leqq \| x \| + \| y \|\ . \end{array}$$

Нормираното пространство L с норма $\| \,.\, \|$ се означава с $(L, \| \,.\, \|)$.

Да отбележим, че нормата и разстоянието в едно пространство са очевидно свързани. По-конкретно, нормата в дадено нормирано пространство може да породи метрика в това пространство. С други думи, може да се запише следното твърдение.

Теорема 1.2.1 *Ако L е нормирано пространство с дадена норма $\| \,.\, \|$, то L е метрично пространство, т.е. равенството $\rho(x, y) := \| x - y \|$ дефинира разстояние в L.*

Доказателство. Първото от свойствата на метрика $\rho(x, y) \geqq 0$ е очевидно изпълнено. За да установим второто свойство, използваме че

$$\rho(x, y) = \| x - y \| = \| -(y - x) \| = | - 1| \ \| (y - x) \| = \| (y - x) \| = \rho(y, x).$$

За третото свойство може да се запише:

$$\rho(x,z) = \| (x-y)+(y-z) \| \leqq \| (x-y) \| + \| (y-z) \| = \rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Следователно така въведеното $\rho(x,y)$ изпълнява и трите свойства на метриката и следователно $\| x-y \|$ индуцира метрика в даденото нормирано пространство L. □

1.3 Пространството $\mathbb{R}^m$ – дефиниция и основни свойства

В по-нататъшното изложение важна роля играе дадената по-долу дефиниция.

Дефиниция 1.3.1 *Под понятието m-мерно пространство $\mathbb{R}^m$ се разбира множеството от всички наредени m-торки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ от реални числа. Числата $a_1, a_2, \ldots, a_m$ се наричат съответно първа, втора, …, m-та координата на a.*

С други думи, $\mathbb{R}^m$ може да се разглежда като m-кратно декартово произведение на множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа, т.е.

$$\mathbb{R}^m = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{m}.$$

Пространството $\mathbb{R}^m$ може да се разглежда като линейно пространство над полето на реалните числа с въведени линейни операции, т.е. ако

$$a, b \in \mathbb{R}^m,\ a = (a_1, a_2, \ldots, a_m),\ b = (b_1, b_2, \ldots, b_m),\ ; \lambda \in \mathbb{R},$$

то

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) \in \mathbb{R}^m, \lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_m) \in \mathbb{R}^m.$$

По-нататък с формулата

$$(a,b) = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \tag{1.3.1}$$

може да се дефинира скаларно произведение. Доказателството, че (1.3.1) изпълнява свойствата на скаларно произведение, следва непосредствено. С така въведеното скаларно произведение пространството $\mathbb{R}^m$ се превръща в евклидово. С равенството:

$$\| a \| := \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k)^2} \tag{1.3.2}$$

се въвежда норма в $\mathbb{R}^m$. Очевидно е, че (1.3.2) удовлетворява първите две свойства на нормата. Третото свойство се получава автоматично, като се вземе под внимание (1.1.4), откъдето следва, че $(\mathbb{R}^m, \| \, . \, \|)$ е нормирано. Нормата (1.3.2) генерира метрика в $\mathbb{R}^m$ с формулата:

$$\rho(a, b) := \| a - b \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2}, \tag{1.3.3}$$

което го превръща в линейно крайномерно, нормирано и метрично пространство.

Забележка 1.3.1 Да отбележим, че ако за скаларния квадрат на a се възприеме обичайното означение $a^2 = (a, a) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k^2$, то неравенството на Коши-Шварц, дадено с (1.1.1), и еквивалентната му форма (1.1.3) могат да се запишат по-кратко по следния начин:

$$(a, b)^2 \leqq a^2 b^2, \quad \text{съответно} \quad | \, (a, b) \, | \leqq \| a \| \| b \| \, . \tag{1.3.4}$$

Неравенството на Минковски за $p = 2$, дадено с (1.1.4), приема вида:

$$\| a + b \| \leq \| a \| + \| b \|, \tag{1.3.5}$$

добре известен като неравенство на триъгълника.

1.4 Точки и множества в $\mathbb{R}^m$

По своето съдържание и форма тази секция се различава от останалите. В нея са дадени много дефиниции, което е свързано с геометрията на m-мерното пространство $\mathbb{R}^m$. Изложението започва с разглеждането на някои елементарни, но полезни понятия. За целта нека точката $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ и $\delta_k > 0, \ k = 1, 2, \dots, m$.

Дефиниция 1.4.1 *Множеството*

$$\Pi(a;\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_m)=\{x\in\mathbb{R}^m:-\delta_k<x_k-a_k<\delta_k\} \tag{1.4.1}$$

се нарича отворен паралелепипед в $\mathbb{R}^m$ с център точката a, а множеството

$$\widetilde{\Pi}(a;\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_m)=\{x\in\mathbb{R}^m:-\delta_k\leqq x_k-a_k\leqq\delta_k\} \tag{1.4.2}$$

се нарича затворен паралелепипед в $\mathbb{R}^m$ с център точката a. В случай, че $\delta_1=\delta_2=\cdots=\delta_m=\delta$, получените множества $\Pi(a;\delta)=\Pi(a;\delta,\delta,\ldots,\delta)$ и $\widetilde{\Pi}(a;\delta)=\widetilde{\Pi}(a;\delta,\delta,\ldots,\delta)$ се наричат съответно отворен и затворен куб в $\mathbb{R}^m$ с център a.

В частност за $m=1$ множеството $\Pi(a;\delta_1)$ е отворен интервал с център в точката a и дължина $2\delta_1$; ако $m=2$, множеството $\Pi(a;\delta_1,\delta_2)$ е отворен правоъгълник с център в точката a и страни, успоредни на координатните оси и с дължини съответно $2\delta_1$ и $2\delta_2$; при $m=3$ множеството $\Pi(a;\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ представлява правоъгълен паралелепипед с ръбове, успоредни на координатните оси, съответно с дължини $2\delta_1$, $2\delta_2$ и $2\delta_3$. Множествата $\widetilde{\Pi}(a;\delta_1)$, $\widetilde{\Pi}(a;\delta_1,\delta_2)$, и $\widetilde{\Pi}(a;\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ са съответстващите им затворени множества, а $\Pi(a;\delta,\delta)$, $\Pi(a;\delta,\delta,\delta)$, $\widetilde{\Pi}(a;\delta,\delta)$ и $\widetilde{\Pi}(a;\delta,\delta,\delta)$ са съответно квадрати и кубове (отворени и затворени).

Да отбележим, че дефинираните в предната секция норма и метрика позволяват да въведем понятията кълбо и сфера в $\mathbb{R}^m$.

Дефиниция 1.4.2 *Нека числото $r>0$. Множеството*

$$B(a;r)=\{x\mid x\in\mathbb{R}^m,\ \rho(x,a)<r\}=\{x\mid x\in\mathbb{R}^m,\ \| x-a\|<r\} \tag{1.4.3}$$

се нарича отворено кълбо в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r, множеството

$$\widetilde{B}(a;r)=\{x\mid x\in\mathbb{R}^m,\ \rho(x,a)\leqq r\}=\{x\mid x\in\mathbb{R}^m,\ \| x-a\|\leqq r\} \tag{1.4.4}$$

се нарича затворено кълбо в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r, а множеството

$$S(a;r)=\{x\mid x\in\mathbb{R}^m,\ \rho(x,a)=r\}=\{x\mid x\in\mathbb{R}^m,\ \| x-a\|=r\} \tag{1.4.5}$$

се нарича сфера в $\mathbb{R}^m$ с център a и радиус r.

Аналогично на паралелепипедите, дефинираните по-горе кълба, както и сферата, са обобщение на добре познати множества. Така например, за $m = 1$, отвореното и затвореното кълбо $B(a;r)$ и $\widetilde{B}(a;r)$ се редуцират съответно до интервалите $(a-r,\, a+r)$, $[a-r,\, a+r]$, а сферата $S(a;r)$ - до множеството $\{a-r, a+r\}$ от краищата на интервалите. За $m = 2$ това са съответно отвореният, затвореният кръг и окръжността с център в точката a и радиус r. За $m = 3$ се получават отвореното и затвореното кълбо и сферата с център a и радиус r.

Други основни понятия, от които се нуждаем, са вътрешна, външна и контурна точка за дадено множество. Нека множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ и $a \in \mathbb{R}^m$.

Дефиниция 1.4.3 *Точката a се нарича*

- *вътрешна за множеството A, ако съществува отворено кълбо $B(a;\varepsilon)$: $B(a;\varepsilon) \subset A$,*
- *външна за A, ако съществува $B(a;\varepsilon) :\ B(a;\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$,*
- *контурна за A, ако за всяко $\varepsilon > 0 :\ B(a;\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ и $B(a;\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \varnothing$.*
- *изолирана за A, ако съществува $\varepsilon > 0 :\ B(a;\varepsilon) \cap A = \{a\}$.*

Множеството от вътрешните точки на множеството A се нарича негова вътрешност и обикновено се означава с $Int\, A$, множеството от външните му точки се нарича негова външност и се означава с $Ext\, A$, множеството на контурните му точки – контур, и се означава с ∂A , а обединението на A с контура му се нарича затворена обвивка на A и се означава с $[A]$, т.е. $[A] = A \cup \partial A$.

Пример 1.4.1 *Например за $m = 2$ окръжността $S(a,r)$ е контур както на отворения и затворения кръг $B(a;r)$ и $\widetilde{B}(a;r)$, така и на самата себе си. Аналогично твърдение е вярно и в пространството $\mathbb{R}^m$, т.е. $\partial B(a,r) = \partial \widetilde{B}(a;r) = \partial S(a;r) = S(a;r)$.*

Забележка 1.4.1 Лесно се установява, че вътрешните точки на дадено множество A принадлежат на A, а външните – на $\mathbb{R}^m \setminus A$, т.е. $\operatorname{Int} A \subset A$ и $\operatorname{Ext} A \subset \mathbb{R}^m \setminus A$.

Дефиниция 1.4.4 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича*

- *отворено, ако всяка негова точка е вътрешна,*
- *затворено, ако неговото допълнение $\mathbb{R}^m \setminus A$ е отворено.*

Ясно е, че множеството от вътрешните точки $\operatorname{Int} A$ на дадено множество е отворено и множеството $\operatorname{Ext} A$ от външните му точки също е отворено и никое от тях не съдържа контурни точки. За компенсация затвореното множество съдържа всички точки на контура си. Изобщо казано, отвореното множество не съдържа контурни точки, а затвореното съдържа всичките си такива. Ще отбележим, че в общия случай едно множество може да съдържа някои точки от контура, а други да не съдържа. С други думи, "повечето" множества в $\mathbb{R}^m$ не са нито отворени, нито затворени.

Пример 1.4.2 *По-долу са дадени примери за отворени и затворени множества (Проверката се извършва елементарно и е оставена на вниманието на любознателния читател.).*

а) отвореното кълбо е отворено множество

б) отвореният паралелепипед $\Pi(a; \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)$ също е отворено множество;

а′) затвореното кълбо е затворено множество

б′) затвореният паралелепипед $\widetilde{\Pi}(a; \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)$ също е затворено множество.

Трябва да се има предвид, че една и съща точка в дадено множество може да бъде вътрешна относно едно пространство, съдържащо множеството, и да не бъде вътрешна точка на разглежданото множество относно друго пространство, също съдържащо това множество. Например, да разгледаме пространството $\mathbb{R}^2$ (т.е. равнината) с някаква фиксирана система от декартови координати, които да означим с x и y. Оста x в тази равнина представлява пространството $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Всяка точка на произволен интервал (a, b) от тази ос, т.е множеството от точки:

$$\{(x, y) : a < x < b, y = 0\}$$

на равнината $\mathbb{R}^2$, е вътрешна точка за интервала относно едномерното пространство $\mathbb{R}$, но не е вътрешна точка за този интервал относно цялата равнина $\mathbb{R}^2$. Нещо повече, интервалът (a, b) е отворено множество в $\mathbb{R}$, но не е отворено множество в $\mathbb{R}^2$.

Забележка 1.4.2 За удобство координатите в $\mathbb{R}$ се означават с x, в $\mathbb{R}^2$ – с x и y, а в $\mathbb{R}^3$ – с x, y и z.

Много удобна се оказва следната дефиниция.

Дефиниция 1.4.5 *Околност на дадена точка $a \in \mathbb{R}^m$ се нарича всяко отворено множество, което я съдържа. Означава се с U_a.*

Трябва да се спомене, че във всяка околност U_a на точката a се съдържат както "кълбовидна", така и "паралелепипедна" околност на тази точка. Нещо повече, за всяка "кълбовидна" околност $B(a;\varepsilon)$ съществува такава "паралелепипедна" околност $\Pi(a;\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_m)$ на тази точка, че

$$\Pi(a;\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_m) \subset B(a;\varepsilon).$$

Обратно, за всяка "паралелепипедна" околност $\Pi(a;\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_m)$ на точката a, съществува нейна околност $B(a;\varepsilon)$, такава че

$$B(a;\varepsilon) \subset \Pi(a;\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_m).$$

Ако "паралелепипедната" околност е m-мерен куб, тя се нарича "кубична" околност.

Дефиниция 1.4.6 *Точката a се нарича точка на сгъстяване на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$, ако всяка нейна околност U_a съдържа поне една точка на A, различна от a, т.е. $U_a \cap (A \setminus \{a\}) \neq \varnothing$ ($\Leftrightarrow$ в U_a съществува поне една точка $\in A \setminus \{a\}$, т.е. $\exists\, \xi \in U_a \cap A$, $\xi \neq a$).*

Очевидно, ако точката a е точка на сгъстяване за множеството A, то a принадлежи на затворената обвивка на A, т.е. $a \in [A]$.

Дефиниция 1.4.7 *Величината*

$$d = d(A) = \sup_{a',a'' \in A} \rho(a',a'') \tag{1.4.6}$$

се нарича диаметър на множеството $A \subset \mathbb{R}^m$.

Дефиниция 1.4.8 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича ограничено, ако съществува кълбо (с краен радиус), което го съдържа.*

Изключително полезно се оказва следното елементарно твърдение.

Твърдение 1.4.1 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ е ограничено тогава и само тогава, когато съществуват краен брой кълба (с краен радиус), които го покриват.*

Доказателство. Ако A е ограничено, то съгласно Дефиниция (1.4.8) съществува кълбо, което го съдържа (т.е. покрива го едно кълбо). Обратно, нека кълбата $B(a_k; r_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, покриват множеството A, т.е.

$$A \subset \cup_{k=1}^{n} B(a_k; r_k).$$

Нека освен това

$$\rho_{i_0,j_0} = \max_{i \neq j} \rho_(a_i, a_j) = \rho_(a_{i_0}, a_{j_0}), \quad r_0 = \max_{k=1,\ldots,n} r_k.$$

Тогава за диаметъра на множеството A получаваме:

$$d = d(A) \leqq \rho_{i_0,j_0} + r_{i_0} + r_{j_0} \leqq \rho_{i_0,j_0} + 2r_0 = R.$$

Това означава, че кое да е от кълбата с радиус R и център в точката a_{i_0} или a_{j_0} съдържа множеството A. □

Също така лесно се установява верността и на следното твърдение.

Твърдение 1.4.2 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ е ограничено тогава и само тогава, когато $d(A) < \infty$.*

Друго основно понятие, необходимо за по-нататъшното изложение, е понятието компактност.

Дефиниция 1.4.9 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако от всяко негово отворено покритие може да се избере крайно подпокритие. Фамилията $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ от подмножества на $\mathbb{R}^m$ се нарича отворено покритие на A, ако $B_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества, $A \subset \cup_\alpha B_\alpha$ и индексите α са реални числа от някакво произволно множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ (B_α може да са и неизброимо много), т.е.*

$$\{B_\alpha\} = \{B_\alpha\}_\alpha = \{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} = \{B_\alpha : B_\alpha - \textit{отворени},\ A \subset \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha\}.$$

Следващата теорема дава връзка между затворените, ограничените и компактните множества в $\mathbb{R}^m$.

Теорема 1.4.1 *Ако множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ е компактно, то A е затворено и ограничено.*

Доказателство. Нека A е компактно. Да докажем, че A е затворено означава да докажем, че $\mathbb{R}^m \setminus A$ е отворено. Нека за целта $x \in A$ и $y \in \mathbb{R}^m \setminus A$. Това означава, че $y \notin A$, и следователно $x \neq y$. Но тогава съществуват U_x и $U_y^{(x)}$, за които $U_x \cap U_y^{(x)} = \varnothing$. Когато x се изменя в множеството A, фамилията от множества $\{U_x\}_{x \in A}$ образува отворено покритие на A. Следователно от него може да се избере крайно подпокритие, т. е. съществуват точки:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n : A \subset \cup_{k=1}^n U_{x_k}.$$

По-нататък множеството $U_y = \cap_{k=1}^n U_y^{(x_k)}$ очевидно е околност на y и освен това е в сила равенството $A \cap U_y = \varnothing$ (вярно е дори, че $(\cup_{k=1}^n U_{x_k}) \cap U_y = \varnothing$). Следователно $U_y \subset \mathbb{R}^m \setminus A$, което означава, че $\mathbb{R}^m \setminus A$ е отворено, и следователно A е затворено.

За да се докаже ограничеността може да се разгледа системата от множествата $B(x;1)$ за $x \in A$. Очевидно тези множества образуват отворено покритие на A, и следователно може да се избере негово крайно подпокритие, т.е. съществуват точки

$$x_1, x_2, \ldots, x_n : A \subset \cup_{k=1}^n B(x_k; 1),$$

откъдето съгласно Твърдение 1.4.1 следва, че множеството A е ограничено. $\square$

Забележка 1.4.3 *Ако множество $A \subset \mathbb{R}^m$, то е вярно и обратното твърдение, т.е. в $\mathbb{R}^m$ наличието едновременно на свойствата ограниченост и затвореност е еквивалентно на компактност.*

Теорема 1.4.2 *Ако дадено множество $A \subset \mathbb{R}^m$ е затворено и ограничено, то A е компактно.*

Доказателство. Доказателството е разделено на две части.

Първо е разгледан случаят, когато A е m-мерен паралелепипед в $\mathbb{R}^m$, т.е. декартово произведение на крайни затворени интервали:

$$A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$$

и $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ е негово отворено покритие. За удобство е разгледан случаят $m = 2$. Нека е даден правоъгълникът $A = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Да допуснем противното, т.е. че A не може да бъде покрито с никаква крайна фамилия от елементи на $\{B_\alpha\}$. Да прекараме вертикалната права през средата на интервала $[a,b]$ и хоризонталната права през средата на $[c,d]$. Тези две прави разделят правоъгълника A на четири еднакви по форма правоъгълника. Тогава поне един от тях не може да бъде покрит с краен брой от елементи на $\{B_\alpha\}$. Наистина, ако и четирите малки правоъгълника могат да се покрият с краен брой множества от $\{B_\alpha\}$, то същото ще бъде вярно и за обединението им правоъгълника A. Да изберем един от тях, за който не съществува крайно подпокритие, и да го означим с A_1. Тогава $A_1 = [a_1,b_1] \times [c_1,d_1] \subset A$, откъдето $[a_1,b_1] \subset [a,b]$ и $[c_1,d_1] \subset [c,d]$. При това $b_1 - a_1 = (b-a)/2$ и $d_1 - c_1 = (d-c)/2$. Процесът може да се продължи по-нататък, като A_1 се раздели на четири еднакви правоъгълника и се избере един от тях, означен с A_2, и т.н. По този начин се получава намаляваща редица от правоъгълници $A \supset A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset \ldots$, като $A_n = [a_n,b_n] \times [c_n,d_n]$, и никой от правоъгълниците A_n не може да бъде покрит от краен брой елементи на $\{B_\alpha\}$. Очевидно числовата редица $\{a_n\}$ е монотонно растяща и ограничена. Следователно тя е сходяща, и да означим нейната граница с a_0. Редицата $\{b_n\}$ е монотонно намаляваща и ограничена и тъй като $b_n - a_n = (b-a)/2^n \to 0$, то $\{b_n\}$ клони към същата граница a_0. Оттук се вижда, че за всяко естествено n е изпълнено $a_0 \in [a_n,b_n]$. Същото разсъждение е валидно и за вторите координати и доказва съществуването на число b_0 такова, че $b_0 \in [c_n,d_n]$ за всяко n. Очевидно точката $P_0 = (a_0,b_0)$ принадлежи на всеки от правоъгълниците A_n, $n = 1,2,\ldots$. Тъй като $P_0 \in A$, то P_0 принадлежи на някое отворено множество B_{α_0} от покритието.

Според дефиницията на отворено множество съществува такова $\varepsilon > 0$, че $B(P_0;\varepsilon) \subset B_{\alpha_0}$. Лесно се вижда, че при достатъчно големи n, $A_n \subset B(P_0;\varepsilon)$ (това е изпълнено при $\sqrt{(b_n-a_n)^2 + (d_n-c_n)^2} < \varepsilon$). Така A_n е подмножество на B_{α_0}, което противоречи на допускането, че A_n не може да бъде покрито с краен брой от множествата B_α.

Полученото противоречие завършва първата част на доказателството.

В m-мерния случай доказателството се извършва аналогично, с единствената разлика, че на всяка стъпка поредният m-мерен паралелепипед се разделя на 2^m части, и всички направени по-горе разсъждения остават в сила.

Втора част. Като се използва първата част, може да се премине към доказателството на теоремата в общия случай. Нека A е ограничено и затворено множество в $\mathbb{R}^m$ и $\{B_\alpha\}$ е негово отворено покритие. Тъй като A е ограничено, съществува m-мерен паралелепипед $\widetilde{\Pi} = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_m,b_m]$, такъв че $A \subset \widetilde{\Pi}$.

Нека $\mathcal{B}$ е фамилията от отворени множества, която се състои от множествата на $\{B_\alpha\}$ и отвореното множество $\mathbb{R}^m \setminus A$. Очевидно $\mathcal{B}$ е покритие за $\widetilde{\Pi}$ и по доказаното по-горе съществуват краен брой отворени множества $B_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_s}$ от системата $\{B_\alpha\}$, така че $\widetilde{\Pi} \subset (\mathbb{R}^m \setminus A) \cup B_{\alpha_1} \cup \cdots \cup B_{\alpha_s}$. Последното означава, че $A \subset B_{\alpha_1} \cup \cdots \cup B_{\alpha_s}$. $\square$

Обединявайки заедно Теорема 1.4.1 и 1.4.2, както е отбелязаано и в Забележка 1.4.3, може да се запише следният важен резултат.

Теорема 1.4.3 *Ако $A \subset \mathbb{R}^m$, то A е компактно тогава и само тогава, когато е затворено и ограничено.*

Друго понятие, което представлява интерес, е понятието непрекъсната крива.

Дефиниция 1.4.10 *Множеството $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, чиито координати са непрекъснатите функции $x_k = x_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots m)$, дефинирани върху даден интервал $[a, b]$, се нарича непрекъсната крива в $\mathbb{R}^m$. Аргументът t се нарича параметър на кривата. Точките*

$$x(a) = (x_1(a), x_2(a), \ldots, x_m(a)), \quad x(b) = (x_1(b), x_2(b), \ldots, x_m(b))$$

се наричат съответно начало и край на дадената крива. Ако $x(a) = x(b)$, кривата се нарича затворена.

Така например по-надолу са дадени две непрекъснати криви в $\mathbb{R}^2$.

Пример 1.4.3 *Линията $L : y = \lambda(t)$, зададена в интервала $[0, 1]$ с уравнението:*

$$y = \lambda(t) = \begin{cases} t \cos \dfrac{\pi}{t}, & 0 < t \leqq 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

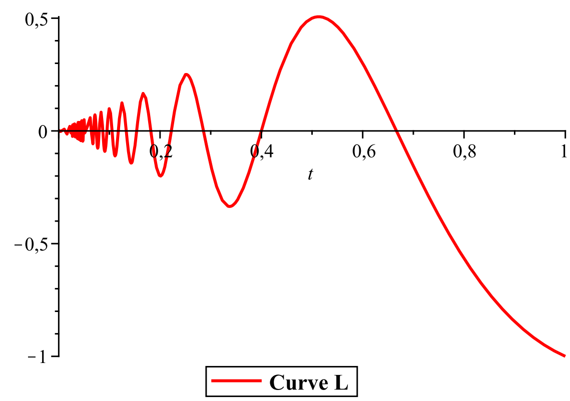
е непрекъсната. Линията C, зададена с параметричните уравнения:

$$C : x = \varphi(t) = 3 \cos t, \ y = \psi(t) = 3 \sin t,$$

за t в интервала $[0, 2\pi]$, също е непрекъсната.

Наистина, функцията $\lambda(t)$ е непрекъсната за $t = 0$, тъй като $\lim\limits_{t \to 0} \lambda(t) = 0 = \lambda(0)$, а също така и за $t \in (0, 1]$, защото там тя е произведение на две непрекъснати функции и знаменателят $t \neq 0$, и следователно $\lambda(t)$ е непрекъсната за всички $t \in [0, 1]$. Това показва, че разглежданата крива $L : y = \lambda(t)$ за $t \in [0, 1]$, е непрекъсната.

По-надолу е изобразена графиката на кривата L и е показано, че нейната дължина е безкрайна.



Наистина, да фиксираме $n \in \mathbb{N}$ и да означим $t_0 = 0$, $t_1 = 1/n$, $t_2 = 1/(n-1)$, $\ldots$, $t_{n-1} = 1/2$, $t_n = 1$, и $x_k = t_k$, $y_k = \lambda(t_k)$, $M_k = (x_k, y_k)$ за $k = 0, 1, \ldots, n$, т.е.

$$t_0 = 0,\ t_k = \frac{1}{n-k+1}(k = 1 \div n); \quad x_k = t_k,\ y_k = \lambda(t_k)\ (k = 0 \div n).$$

Обаче, предвид равенството $\cos(n\pi) = (-1)^n$, за $\lambda(t_k)$ са валидни и равенствата:

$$\lambda(t_0) = 0,\ \lambda(t_1) = \frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^n}{n},$$

$$\lambda(t_{k-1}) = \frac{(-1)^{n-k+2}}{n-k+2},\ \lambda(t_k) = \frac{(-1)^{n-k+1}}{n-k+1},\ \text{за } k = 2 \div n,$$

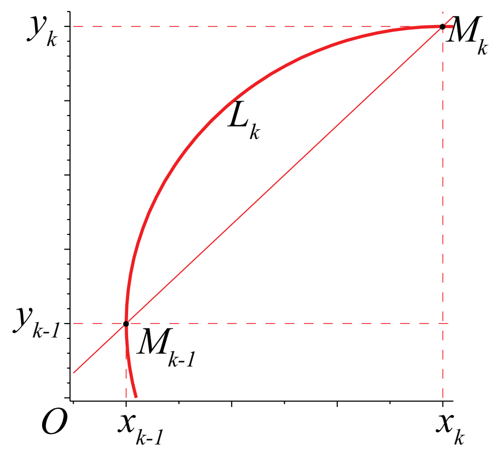
откъдето за разстоянията $\rho(M_{k-1}, M_k)$ се получават оценките:

$$\rho(M_0, M_1) > |y_1 - y_0| = |\lambda(t_1) - \lambda(t_0)| = \frac{1}{n},$$

$$\rho(M_{k-1}, M_k) > |y_k - y_{k-1}| = |\lambda(t_k) - \lambda(t_{k-1})| =$$

$$= \frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{n-k+2} > \frac{1}{n-k+1}, \quad \text{за } k = 2 \div n,$$

и ако $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, то дължината $l(L) > S_n$.



Най-сетне, редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ (т.е. $S_n \to \infty$), и следователно $l(L) = \infty$, което показва, че тази очарователна крива линия има безкрайна дължина.

Аналогично, и кривата C е непрекъсната, защото функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са непрекъснати. Само да отбележим, че C е централна окръжност (т.е. окръжност с център точката $(0,0)$) с радиус 3 и нейната дължина е крайна. □

Дефиниция 1.4.11 *Нека $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ са фиксирани числа, за които $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k^2 > 0$. Множеството от точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, чиито координати се представят във вида*

$$x_k = x_k^0 + \alpha_k t, \quad k = 1, 2, \ldots m, \quad -\infty < t < \infty,$$

се нарича права линия в пространството $\mathbb{R}^m$, минаваща през точката x^0 по "напрвление" $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Частта от правата, съответстваща на изменението на параметъра t в някакъв интервал $[a, b]$, се нарича отсечка, а частта, съответстваща на безкрайния интервал $t \geq t_0$, – лъч.

Очевидно е, че в случая $m = 3$ се получава съответно права, отсечка или лъч в тримерното пространство, а $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ е направлението на вектора на тази права.

Дефиниция 1.4.12 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича свързано, ако за всеки две негови точки съществува непрекъсната крива линия γ, която ги свързва, и $\gamma \subset A$.*

Дефиниция 1.4.13 *Множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича област, ако е отворено и свързано (Да не се бърка с дефиниционна област на функция!). Ако множеството е и затворено, то се нарича затворена област.*

Дефиниция 1.4.14 *Област, всеки две точки на която могат да се съединят с отсечка, изцяло лежаща в нея, се нарича изпъкнала област.*

Дефиниция 1.4.15 *Областта* $A \subset \mathbb{R}^m$ *се нарича звездообразна област относно точката* $x^0 \in A$*, ако за всяка точка* $x \in A$*, отсечката* $[x^0, x]$ *лежи изцяло в* A*.*

1.5 Редици от точки в $\mathbb{R}^m$

Нека x_k $(k = 1, 2, \dots m)$ са функции, дефинирани в множеството $\mathbb{N}$ на естествените числа със стойности в $\mathbb{R}$, и е използвано означението $x_k^{(n)} = x_k(n)$ за $n \in \mathbb{N}$. Това означава, че точките $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \in \mathbb{R}^m$. Очевидно $x^{(n)}$ може да се разглежда като образ на n в елемент от $\mathbb{R}^m$. По-долу е дадена дефиниция за редица в $\mathbb{R}^m$ и още няколко съпътстващи дефиниции.

Дефиниция 1.5.1 *Редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\right\}_{n=1}^{\infty}$ *се нарича редица от точки в* $\mathbb{R}^m$*, а редицата* $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ $(k = 1 \div m)$*– нейна* k*-та координатна редица. По-кратко редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ *се означава с* $\{x^{(n)}\}$*.*

Дефиниция 1.5.2 *Редицата* $\{y^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ *се нарича подредица на редицата* $\{x^{(n)}\}$ *и се означава:*

$$\{x^{(n_l)}\},\ l = 1, 2, \dots, \quad \text{или} \quad \{x^{(n_l)}\}_{l=1}^{\infty},$$

ако за всяко l *съществува такова* n_l*, че* $y^{(l)} = x^{(n_l)}$*, при това, ако* $l' < l''$*, то* $n_{l'} < n_{l''}$*.*

Дефиниция 1.5.3 *Редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ *се нарича сходяща към точката* $a \in \mathbb{R}^m$ *(казва се още, че границата на тази редица е точката* a*), ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува такова* $N_0 > 0$*, че за всяко* $n > N_0$ *е изпълнено неравенството* $\rho(x^{(n)}, a) = \parallel x^{(n)} - a \parallel < \varepsilon$*. Ако редицата* $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ *няма граница, тя се нарича разходяща.*

Както в случая на числови редици, и в пространството $\mathbb{R}^m$ може да се каже, че редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към точката $a \in \mathbb{R}^m$, ако всяка ε-околност $B(a;\varepsilon)$ съдържа всичките членове на редицата, с изключение евентуално на краен брой.

Забележка 1.5.1 *Вместо кълбо $B(a;\varepsilon)$ може да се използва паралелепипед от вида* (1.4.1), *чиито стени са успоредни на кординатните оси.*

Дефиниция 1.5.4 *Точката $a \in \mathbb{R}^m$ се нарича точка на сгъстяване за редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, ако всяка нейна околност съдържа безброй много членове на редицата.*

Понятието граница на редица $\{x^{(n)}\}$ от точки на пространството $\mathbb{R}^m$ може да се сведе до понятието граница на числова редица, по-конкретно до границите на координатните редици $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \dots, m$, образувани от съответните координати на $\{x^{(n)}\}$. По-долу е формулирано необходимо и достатъчно условие за сходимост на редица от точки в $\mathbb{R}^m$, като е използвана сходимостта на координатните редици.

Теорема 1.5.1 *Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$ и точката $a \in \mathbb{R}^m$. Тогава*

$$\left(\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \to a\right) \Longleftrightarrow \left(\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \to a_k,\ k = 1 \div m\right), \tag{1.5.1}$$

т.е. редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ има граница точката a тогава и само тогава, когато всяка от координатните редици $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ има граница съответната координата a_k ($k = 1, 2, \dots, m$) на точката a.

Доказателство. Използва се неравенството (1.1.6), приложено за $b_k = x_k^{(n)}$, което в този случай придобива вида:

$$\mid x_k^{(n)} - a_k \mid \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k^{(n)} - a_k)^2} \leq \sum_{k=1}^{m} \mid x_k^{(n)} - a_k \mid \quad (k = 1 \div m). \tag{1.5.2}$$

Първо е доказана необходимостта на условието. За целта, нека редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ има граница точката a и $\varepsilon > 0$ е фиксирано положително число. Тогава, съгласно Дефиниция 1.5.3 и неравенство (1.5.2), съществува такова число $N_0 > 0$, че за всяко $n > N_0$ е изпълнено:

$$\mid x_k^{(n)} - a_k \mid \leq \rho(x^{(n)}, a) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k^{(n)} - a_k)^2} < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, m), \tag{1.5.3}$$

което означава, че k-та координатна редица $\{x_k^{(n)}\}$ е сходяща към k-та координата a_k на точката a за $k = 1, 2, \ldots, m$.

Обратно, нека $\{x_k^{(n)}\}$ има граница a_k, за $k = 1, 2, \ldots, m$ и нека $\varepsilon > 0$. Тогава съществува такова число $N_0 > 0$, че за всяко $n > N_0$ е изпълнено $| x_k^{(n)} - a_k |< \frac{\varepsilon}{m}$, което заедно с неравенство (1.5.2) дава:

$$\rho(x^{(n)}, a) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k^{(n)} - a_k)^2} \leq \sum_{k=1}^{m} | x_k - a_k |< m\,\frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon. \tag{1.5.4}$$

С това твърдението е доказано и в обратната посока. □

Забележка 1.5.2 *Важно е да се отбележи, че от Теорема 1.5.1 и едно от свойствата на числовите редици следва, че ако дадена редица от точки има граница, то тази граница е единствена. В този ред на мисли, аналогично на числова редица, една редица от точки е сходяща тогава и само тогава, когато е ограничена и има единствена точка на сгъстяване. Наред с това, всяка подредица на сходяща редица също е сходяща, и то към същата граница.*

За илюстрация към Теорема 1.5.1 и Забележка 1.5.2 е приведен следният пример.

Пример 1.5.1 *Да се покаже дали посочените редици* $\{X_n\} = \{x_n, y_n\}$*:*

а) $x_n = 1 + \dfrac{1}{n},\ y_n = 2 + \dfrac{\sin n}{n}$

б) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n,\ y_n = 2 + n$

в) $x_n = (-1)^n,\ y_n = n$

г) $x_n = (-1)^n,\ y_n = \dfrac{1}{n}$

д) $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2},\ y_n = (-1)^n$

е) $x_n = \sin n,\ y_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

са сходящи или разходящи. За онези от тях, които са сходящи, да се намери границата.

Решенията на отделните подточки в примера са изложени по реда на задаването им.

а) Тъй като $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, а $0 \le \dfrac{|\sin n|}{n} \le \dfrac{1}{n}$, то $\lim x_n = 1$ и $\lim y_n = 2$, което означава, че редицата е сходяща и точката $(1, 2)$ е нейната граница.

б) В този случай $\lim x_n = e$, но $\lim y_n$ не съществува, и следователно дадената редица е разходяща.

в) Тук и двете координатни редици са разходящи (първата, защото има две точки на сгъстяване, а втората, защото е неограничена) и следователно редицата няма граница.

г) Въпреки че втората координатна редица е сходяща с граница $\lim y_n = 0$, то дадената редица е разходяща, защото $\lim x_n$ не съществува.

д) Веднага се вижда, че редицата е разходяща, защото втората координатна редица е разходяща. Независимо от това, да отбележим, че и първата координатна редица е разходяща. Това се вижда, например ако разгледаме две нейни подредици с общ член съответно $x'_k = x_{2k}$ и $x''_k = x_{4k+1}$, за $k = 1, 2, \ldots$. Първата има граница 0, а втората е сходяща към 1.

е) Границата на втората координатна редица очевидно е равна на 0. Интерес представлява изследването на първата координатна редица. Избираме подредица с индекси $l'_k \in \mathbb{N}$, $l'_k \in [2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}]$, за $k = 1, 2, \ldots$ (цяло l'_k очевидно съществува в интервала $[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}]$, защото дължината му е $\frac{2\pi}{3} > 2$). Тогава $x'_k = \sin(l'_k) \ge \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. За втора подредица избираме $l''_k \in [2k\pi + \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{11\pi}{6}]$, който интервал също има дължина, по-голяма от две. Но за членовете на тази подредица е изпълнено $x''_k = \sin(l''_k) \le \sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. Следователно, ако границите $\lim(x'_k)$ и $\lim(x''_k)$ биха съществували, то

$$\lim(x'_k) = \lim(\sin(l'_k)) \ge \frac{1}{2}, \quad \lim(x''_k) = \lim(\sin(l''_k)) \le -\frac{1}{2},$$

което показва, че редицата $\{x_n\}$ е разходяща, и следователно дадената редица също е разходяща.

По-нататък е формулирано твърдение, аналогично на критерия на Коши за числови редици. То дава необходимо и достатъчно условие за сходимост на редица от точки в пространството $\mathbb{R}^m$.

Теорема 1.5.2 (Критерий на Коши) *Нека $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ за $n \in \mathbb{N}$. Редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $N_0 > 0$, че при всяко $n \in \mathbb{N}$, $n > N_0$, и всяко $p \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството $\rho(x^{(n+p)}, x^{(n)}) = \| x^{(n+p)} - x^{(n)} \| < \varepsilon$.*

Дефиниция 1.5.5 *Редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича ограничена, ако съществува кълбо (с краен радиус), което съдържа всичките ѝ членове.*

Ако редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, то тя е ограничена, тъй като всяка една от координатните редици $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ $(k = 1 \div m)$ е сходяща, и следователно е ограничена.

По-нататък е дадена теорема, аналогична на теоремата на Болцано–Вайерщрас за едномерния случай, според която всяка ограничена редица има поне една точка на сгъстяване, която обикновено се нарича по същия начин. Нейното доказателство отново се свежда до едномерния случай (на базата на Теорема 1.5.1) и тук е пропуснато. Нейната формулировка е записана в следната еквивалентна форма.

Теорема 1.5.3 (Болцано–Вайерщрас) *От всяка ограничена редица във пространството $\mathbb{R}^m$ може да се избере сходяща подредица.*

Забележка 1.5.3 *Да отбележим едно очевидно свойство, което се отнася за затворените множества. Ако $A \subset \mathbb{R}^m$ е затворено множество (т.е. $A = [A]$) и $\{x^{(n)}\}$ е сходяща редица, всички членове на която принадлежат на множеството A, т.е. $x^{(n)} \in A$ за $n = 1, 2, \dots$, то границата на тази редица също е от множеството A. Действително, ако $\lim\{x^{(n)}\} = a$, то всяка околност на a съдържа безброй много членове на редицата (а те са елементи и на A), което означава, че a е точка на сгъстяване за множеството A или изолирана точка, т.е. точка от $[A]$.*

Дефиниция 1.5.6 *Множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ се нарича компактно, ако от всяка редица $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $x^{(n)} \in A$, може да се избере сходяща подредица $\{x^{(n_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ с граница, принадлежаща на A.*

В предната секция беше дадена още една дефиниция за компактно множество. Затова е нужно да се изясни дали и при какви условия тези дефиниции са еквивалентни, т.е. компактността на дадено множество по коя да е от двете дефиниции да влече компактност по другата. Оказва се вярна следната теорема.

Теорема 1.5.4 *Ако множеството* $A \subset \mathbb{R}^m$*, то Дефиниция 1.4.9 е еквивалентна на Дефиниция 1.5.6.*

Доказателство. Нека множеството $A \subset \mathbb{R}^m$ е компактно по смисъла на Дефиниция 1.4.9 и нека $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ е редица в A. Нека по-нататък фамилията от множества $\{B(x^{(n)};r)\}_{n=1}^{\infty}$ е отворено покритие на A. Следователно, от него може да се избере крайно подпокритие $\{B(x^{(n_k)};r)\}_{k=1}^{s}$, $s \in \mathbb{N}$, и тъй като редицата $\{x^{(n)}\}$ е безкрайна, то в поне едно от множествата на крайното покритие се съдържат безброй много членове $x^{(n_l)}$ на редицата. Но тогава $x^{(n_l)}$ е ограничена и съгласно Теорема 1.5.3, от нея (а следователно и от първоначално разглежданата редица $\{x^{(n)}\}$) може да се избере сходяща подредица с граница точка a. Съгласно Теорема 1.4.1 множеството A е затворено, откъдето $a \in A$.

Обратно, ако A е компактно в смисъл на Дефиниция 1.5.6, може да се докаже, че то е затворено и ограничено, и следователно компактно (по Теорема 1.4.3). Наистина, допускането че A е неограничено води до съществуването на редица от точки $x^{(n)} \in A$, за която разстоянието $\rho(0,x^{(n)}) \to \infty$, и нека $\{x^{(n_l)}\}$ е нейна подредица, с граница точка $a \in A$. Тогава, от една страна, $\rho(0,x^{(n_l)}) \to \rho(0,a)$, от друга страна $\rho(0,x^{(n_l)}) \to \infty$, тъй като $\{\rho(0,x^{(n_l)})\}$ е подредица на $\{\rho(0,x^{(n)})\}$, което доказва ограничеността на A. За да се докаже, че A е затворено може да се вземе произволна точка a от контура ∂A на множеството A и да се разгледат кълбетата $B(a;1/n)$ за $n = 1,2,\ldots$. Всяко от тези кълбета има непразно сечение с множеството A, и следователно $x^{(n)} \in A \cap B(a;1/n)$, откъдето $x^{(n)} \to a$. От друга страна, съществува нейна подредица, сходяща към точка $a' \in A$. Но, както е отбелязано в Забележка 1.5.2, $a' = a$, и следователно $a \in A$. $\square$

Глава 2

Функция на няколко променливи. Граница и непрекъснатост

2.1 Дефиниция на функция на няколко променливи

Както и в първата част на анализа, основна роля играе понятието функция, в случая дефинирана за повече от една променлива. За такава функция се казва, че е функция на няколко (на повече или на много) променливи.

Нека множеството D е подмножество на $\mathbb{R}^m$, т.е. $D \subset \mathbb{R}^m$.

Дефиниция 2.1.1 *Казва се, че е дадена функция с дефиниционна област D (или дефиниционно множество D), ако на всяка точка $x = (x_1, \ldots, x_m)$ от множеството D е съпоставено реалното число $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$, т.е за всяко $x \in D$ съществува единствено число $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Понякога кратко се записва*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{2.1.1}$$

Да припомним, че за удобство в $\mathbb{R}^2$ ще използваме обичайното означение (x, y), а в $\mathbb{R}^3$ – (x, y, z). По-долу са приведени няколко примери за функции, дефиниционните множества на които са означени с D.

Пример 2.1.1 *Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и са разгледани следните няколко функции, дефинирани в D със стойности в $\mathbb{R}$ (т.е. $D \longrightarrow \mathbb{R}$). Посочени са не само аналитичните им изрази, но и дефиниционното множество на всяка от тях, както следва:*

а) $D = \mathbb{R}^2$ *(т.е.* $m = 2$*),* $z(x, y) = x^2 + y^2$;

б) $D = \{(x, y) :\ y^2 - 2x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $z(x, y) = \sqrt{y^2 - 2x}$;

в) $D = \{(x, y) :\ y^2 - 2x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $z(x, y) = \ln \sqrt{y^2 - 2x}$;

г) $D = \{(x, y) :\ -y^2 + 2x + 1 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $z(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{-y^2 + 2x + 1}}$;

д) $D = \widetilde{B}(0; \sqrt{\pi}) = \{(x, y, z) :\ 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi\} \subset \mathbb{R}^3$,
$w(x, y, z) = \arccos(x^2 + y^2 + z^2)$;

е) $D = \mathbb{R}^m$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^m \\ 0, & x \in \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Q}^m \end{cases} \qquad (x = (x_1, x_2, \ldots x_m) \in \mathbb{R}^m)$

Тази малко "по-екзотична" функция е своеобразен аналог на функцията на Дириле (зададена в $\mathbb{R}$). Дефинирана е в $D = \mathbb{R}^m$ и приема стойност 1 за всички точки, чиито координати са рационални числа, и стойност 0, когато поне една от координатите не е рационално число.

2.2 Граница на функция на няколко променливи

В тази секция е въведено и изучено понятието граница на функция, дефинирана в множество $D \subset \mathbb{R}^m$. Изложението почти дословно повтаря едномерния случай. Отново имаме две еквивалентни дефиниции за граница на функция, а именно дефиниция на Коши и дефиниция на Хайне.

Дефиниция 2.2.1 (Коши) *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^m$ и a е точка на сгъстяване за D. Казва се, че $f(x)$ има граница L при $x \to a$ със стойности $x \neq a$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x, a) = \|x - a\| < \delta$, е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$. Записва се $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f(x) = L$ или просто $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.*

Дефиниция 2.2.2 (Хайне) *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^m$ и a е точка на сгъстяване за D. Казва се, че $f(x)$ има граница L при $x \to a$, $x \neq a$, ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ ($x^{(n)} \in D$, $x^{(n)} \neq a$), сходяща към a, числовата редица $\{f(x^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ има граница L.*

От дефиницията на Хайне, както и в едномерния случай, веднага следва, че границата на сума, произведение и частно на дадени функции, съществува, стига да съществуват границите на дадените функции (за граница на частното остава задължителното изискване границата на знаменателя да е различна от нула).

Теорема 2.2.1 *Дефинициите 2.2.1 и 2.2.2 на Коши и Хайне за граница на функция са еквивалентни.*

Доказателство. Наистина, нека $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ по смисъла на дефиницията на Коши и нека $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от точки на множеството D, $x^{(n)} \neq a$. Нека е фиксирано $\varepsilon > 0$ и δ е съответното му от дефиниция 2.2.1. Тогава по Дефиниция 1.5.3 за сходимост на редица от точки съществува такова $N_0 > 0$, че $\rho(x^{(n)}, a) = \|x^{(n)} - a\| < \delta$ за всяко $n > N_0$. Следователно при $n > N_0$ е изпълнено $|f(x^{(n)}) - L| < \varepsilon$, което и трябваше да се докаже.

Обратното твърдение, че от дефиницията на Хайне следва тази на Коши, е по-трудно и се извършва чрез допускане на противното. Наистина, допускането, че дефиницията на Коши не е удовлетворена, означава, че съществува такова $\varepsilon_0 > 0$, че за всяко $\delta > 0$ съществува точка $x_\delta \in D$, за която $\|x_\delta - a\| < \delta$, но $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$. Нека δ да приема стойности $\delta_n = \frac{1}{n}$ и нека $x^{(n)} = x_{\delta_n}$. Тогава тези точки удовлетворяват условията $x^{(n)} \in D$, $\|x^{(n)} - a\| < \frac{1}{n}$ и $|f(x^{(n)}) - L| \geq \varepsilon_0$. С други думи, редицата $x^{(n)}$ от точки на D клони към точката a, но редицата от функционалните стойности $f(x^{(n)})$ не клони към L. $\square$

Разбира се, поради еквивалентността на тези две дефиниции, в дадена конкретна ситуация може да се използва тази от тях, която е по-удобна.

Забележка 2.2.1 *Да подчертаем, че дефиницията на Хайне се базира на сходимост на произволни числови редици с една и съща граница $L \in \mathbb{R}$. Това прави възможно използването на лемата на двамата полицаи за намиране граница на функция при x, клонящо към a. С други думи, ако*

$f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in R^m$ е точка на сгъстяване на D и съществува такава околност $U_a \subset \mathbb{R}^m$ на точката a, че

$$g(x) \le f(x) \le h(x),\ x \in U_a, \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L, \tag{2.2.1}$$

то и границата на $f(x)$ при x клонящо към a също съществува, и освен това

$$\lim_{x\to a} f(x) = L. \tag{2.2.2}$$

По-надолу е разгледан случаят на функции, неограничени в околност на дадена точка.

Дефиниция 2.2.3 *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^m$ и a е точка на сгъстяване за D. Казва се, че $f(x)$ дивергира към ∞ (съответно към $-\infty$) при $x \to a$ със стойности $x \neq a$, ако за всяко $A \in \mathbb{R}$ съществува такова $\delta > 0$, че за всяко x от множеството $D \setminus \{a\}$, за което $\rho(x, a) = \|x - a\| < \delta$, е изпълнено $f(x) > A$ (съответно $f(x) < A$). Записва се $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} f(x) = \infty$ $(-\infty)$ или просто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ $(-\infty)$. Казва се още, че $f(x)$ има граница безкрайност (или $(-\infty)$) при $x \to a$ със стойности $x \neq a$.*

Следващият пример се отнася до функция на две променливи. Намерена е нейната граница в посочена точка, като са илюстрирани различни подходи.

Пример 2.2.1 *Нека функцията f е зададена в множеството $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ с формулата $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$. Показано е, че $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.*

1) Първи начин:
Нека $\varepsilon > 0$, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ и $(x, y) \in D_f$. Нека освен това $\rho((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \sqrt{\varepsilon}$. Тогава

$$| f(x, y) - 0 | = \left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| \le \left| \frac{x^4 + y^4 + 2x^2y^2}{x^2 + y^2} \right| = x^2 + y^2 < (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon,$$

откъдето следва, че $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

2) Втори начин:
Нека $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, тогава следва, че $x_n^2 \to 0$, $y_n^2 \to 0$, и съответно $x_n^2 + y_n^2 \to 0$. От друга страна, за стойностите на функцията f е изпълнено

$$0 < f(x_n, y_n) = \frac{x_n^4 + y_n^4}{x_n^2 + y_n^2} \leq x_n^2 + y_n^2.$$

Следователно

$$0 \leq \lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} f(x_n, y_n) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x_n^2 + y_n^2) = 0$$

и $\lim\limits_{(x_n,y_n)\to(0,0)} f(x_n, y_n) = 0$, което означава,че $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

3) Трети начин:
Функцията f има следната двустранна оценка

$$0 < f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2} + \frac{y^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^4}{x^2} + \frac{y^4}{y^2} = x^2 + y^2,$$

и тъй като $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$, то и $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ (съгласно лемата за двамата полицаи – Забележка 2.2.1). $\square$

Следващият пример се отнася до случай, в който границата не съществува.

Пример 2.2.2 *Нека функцията f е зададена в множеството $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ с формулата $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$. Показано е, че тази функция няма граница в точката $(0, 0)$.*

1) Наистина, ако се разгледат редиците с общи членове $x_n = y_n = \dfrac{1}{n}$, които клонят към нула, когато $n \to \infty$, т.е. $\left\{\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \to (0, 0)$, когато $n \to \infty$, съответната редица от функционални стойности с общ член $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = 1$ клони към 1.

2) От друга страна, редиците с общи членове $x_n^{'} = \frac{1}{n}$, $y_n^{'} = -\frac{1}{n}$, също клонят към нула, т.е. $\left\{\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \to (0,0)$, когато $n \to \infty$, но съответната редица от функционални стойности с общ член $f(x_n^{'}, y_n^{'}) = \frac{-\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -1$ клони към -1 (а не към 1).

Следователно $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не съществува. □

Друго полезно понятие, което за простота тук е дадено в пространството $\mathbb{R}^2$, е понятието повторна граница.

Дефиниция 2.2.4 *Нека $D \subset \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на сгъстяване за D и функцията $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Нека съществува такава околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката a_2, че за всички стойности $y \in U_{a_2}$ да съществува $\lim\limits_{x\to a_1, x\neq a_1} f(x,y) = \varphi(y)$. Ако освен това съществува $\lim\limits_{y\to a_2, y\neq a_2} \varphi(y) = A$, то A се нарича повторна граница и се означава както следва*

$$A = A_{1,2} = \lim_{y\to a_2}(\lim_{x\to a_1} f(x,y)).$$

Аналогично се въвежда и другата повторна граница

$$A_{2,1} = \lim_{x\to a_1}(\lim_{y\to a_2} f(x,y)).$$

Следващата интересна теорема, чието доказателство не е приведено тук, дава връзка между понятията граница и повторна граница на функция.

Теорема 2.2.2 *Нека $D \subset \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ е точка на сгъстяване за D и функцията $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Нека*

1) *съществува околност $U_{a_2} \subset \mathbb{R}$ на точката a_2, такава че за всички стойности $y \in U_{a_2}$ да съществува границата $\lim\limits_{x\to a_1, x\neq a_1} f(x,y) = \varphi(y)$*

2) *съществува границата $\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L$ (крайна или безкрайна).*

Тогава съществува и границата $\lim\limits_{y\to a_2, y\neq a_2} \varphi(y)$ *и освен това е в сила равенството* $\lim\limits_{y\to a_2, y\neq a_2} \varphi(y) = L$.

Пример 2.2.3 *Разгледаните по-долу функции са дефинирани в множеството* $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *За тях е изследвано кои от границите*

$$A = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad A_{1,2} = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)), \quad A_{2,1} = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)),$$

съществуват и кои не съществуват, и тези от тях, които съществуват, са изчислени.

а) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

б) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

в) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

г) $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$

д) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

Решенията на съответните подточки следват реда на задаването им.

а) Тъй като вътрешните граници съществуват и имат стойности съответно $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \dfrac{-y}{y} = -1$ и $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \dfrac{x}{x} = 1$, то повторните граници са $A_{1,2} = \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to 0}(-1) = -1$ и $A_{2,1} = \lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)) = \lim\limits_{x\to 0}(1) = 1$. По Теорема 2.2.2 следва, че границата $A = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не съществува, защото противоположното би означавало, че тя е равна едновременно и на $A_{1,2} = -1$, и на $A_{2,1} = 1$, което е невъзможно.

б) Тъй като $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \dfrac{y^2}{(-y)^2} = 1$ и $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, то вътрешните граници съществуват и са равни на 1, поради което и повторните граници имат същата стойност, т.е. $A_{1,2} = A_{2,1} = 1$. Съгласно Теорема 2.2.2, ако границата $A = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ съществува, тя също трябва да бъде равна на 1. Това се потвърждава и при избора на редицата с общ член $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n) \to (0,0)$, за която $f(x_n, y_n) = 1 \to 1$. Последното обаче не е достатъчно, за да може да се направи заключението, че границата A съществува. Наистина, редицата с общ член $(x_n', y_n') = (1/n, -1/n)$ също клони към $(0,0)$, но $f(x_n', y_n') = \dfrac{2n^2}{1+4n^2} \to \dfrac{1}{2} \neq 1$, поради което $f(x,y)$ няма граница при $(x,y) \to (0,0)$.

в) В този случай вътрешните граници са равни на 0, поради което $A_{1,2} = A_{2,1} = 0$. При това положение, според Теорема 2.2.2, ако границата $A = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ съществува, тя също трябва да бъде равна на 0. Вземането на редицата с общ член $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right)$, клоняща към $(0,0)$, води до редица от функционални стойности $f(x_n, y_n) = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2} \neq 0$, и следователно $f(x,y)$ няма граница при $(x,y) \to (0,0)$.

г) Тъй като $0 \le |f(x,y)| \le |x+y| \le |x| + |y|$ и $|x| + |y| \to 0$, когато $(x,y) \to (0,0)$, то границата $A = 0$. Вътрешната граница $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ не съществува, понеже границата $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ не съществува, а

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \left(y\cos\frac{1}{y}\right) \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}\cdot$$

Аналогично се показва, че и другата вътрешна граница не съществува. Но тогава повторните граници $A_{1,2}$ и $A_{2,1}$ също не съществуват.

д) Както е показано в Пример 2.2.1, границата $A = 0$. От друга страна, тъй като вътрешните граници съществуват и $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = y^2$, $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = x^2$, то и повторните граници $A_{1,2}$ и $A_{2,1}$ съществуват, при което $A_{1,2} = A_{2,1} = A = 0$. □

2.3 Непрекъснатост на функция на няколко променливи

Ще се занимаем с понятията непрекъснатост и равномерна непрекъснатост, които се дефинират както в $\mathbb{R}$, само за точки от дефиниционното множество, започвайки с непрекъснатост. За целта нека функцията f е дефинирана в множеството $D \subset \mathbb{R}^m$.

Дефиниция 2.3.1 *Казва се, че функцията $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точката $a \in D$, ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Двете еквивалентни дефиниции на понятието граница на функция водят до две еквивалентни дефиниции на непрекъснатостта.

Дефиниция 2.3.2 (непрекъснатост по Коши) *Казва се, че функцията $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точката $a \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че за всяко x от множеството D, за което $\rho(x, a) = \|x - a\| < \delta$, е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Дефиниция 2.3.3 (непрекъснатост по Хайне) *Казва се, че функцията $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точката $a \in D$, ако за всяка редица $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ (с $x^{(n)} \in D$ за $n \in \mathbb{N}$), сходяща към a, числовата редица $\{f(x^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ има граница $f(a)$.*

Забележка 2.3.1 *Разбира се, тъй като тези две дефиниции са еквивалентни, ние можем да използваме тази от тях, която е по-удобна в дадена конкретна ситуация. Така например, от дефиницията на Хайне, както и в едномерния случай, веднага следва, че сума, разлика, произведение и частно на две непрекъснати функции е също непрекъсната функция (за непрекъснатост на частното в точката a остава задължителното изискване знаменателят да е различен от нула в тази точка).*

Разгледаните по-долу функции са дефинирани в множеството $\mathbb{R}^2$ или в неговото подмножество $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. За тях е изследвано къде са непрекъснати и къде не са.

Пример 2.3.1 *а)* $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \neq 0$

б) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, \ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

в) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0) \\ 1, \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

а) Функцията $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ е непрекъсната в множеството $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, където е дефинирана, защото е частно на две непрекъснати функции и знаменателят x^2+y^2 е различен от нула в множеството D. В точката $(0,0)$ понятията прекъснатост и непрекъснатост са лишени от смисъл, защото по условие функцията не е дефинирана там.

б) Тази функция е непрекъсната в множеството D по същите причини. Остава да се изясни въпросът единствено в точката $(0,0)$. За целта се нуждаем от границата $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Ако тя е равна на $f(0,0) = 0$, функцията ще бъде непрекъсната и в $(0,0)$, в противен случай ще бъде прекъсната в тази точка. Да припомним, че в подточка д) на Пример 2.2.3, получихме, че търсената граница е равна на нула, откъдето следва непрекъснатостта на f и в точката $(0,0)$. Следователно, тя е непрекъсната в цялото си дефиниционно множество $\mathbb{R}^2$.

в) Аналогично на предните две подточки изследваната функция е непрекъсната в множеството D, но е прекъсната в точката $(0,0)$, защото, както припомнихме по-горе, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, а $0 \neq f(0,0) = 1$ в този случай. □

Пример 2.3.2 *Да се намери стойността на параметъра a (ако съществува), така че дефинираната по-долу функция да е непрекъсната в точката* $(0,0)$*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0) \\ a, \ \mid x \mid + \mid y \mid = 0 \end{cases}.$$

Решението на задачата се свежда до намиране на границата на функцията в точката $(0,0)$ и нейното приравняване на търсената стойност на параметъра a. Ако вземем редиците с общи членове $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n) \to (0,0)$

и $(x'_n, y'_n) = (1/n, -1/n)$, която също клони към $(0,0)$, то за съответните редици от стойности на функциите се получава

$$f(x_n, y_n) = 1/2 \to 1/2, \quad \text{но} \quad f(x'_n, y'_n) = -1/2 \to -1/2 \neq 1/2,$$

поради което f няма граница при $(x,y) \to (0,0)$. Следователно, няма стойност на параметъра a, за която функцията да е непрекъсната в $(0,0)$. □

Пример 2.3.3 *Нека A, B, C и D са подмножества на $\mathbb{R}^2$, дефинирани както следва:*

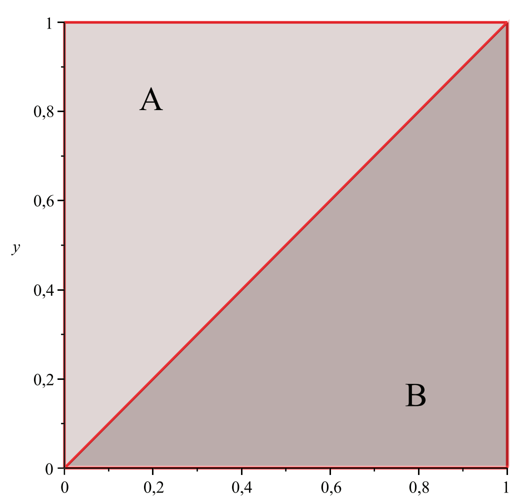
$$A = \{(x,y) : x \geq 0, y \leq 1, y > x\}, \quad B = \{(x,y) : x \leq 1, y \geq 0, y < x\},$$
$$C = \{(x,y) : x = y, 0 \leq x \leq 1\}, \qquad D = A \cup B \cup C,$$

и функцията $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ е зададена по следния начин:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & (x,y) \in A, \\ 0, & x = y, \\ -\dfrac{1}{x^2}, & (x,y) \in B. \end{cases}$$

Да се изследва за непрекъснатост тази функция в дефиниционното си множество D.

Да отбележим, че множествата A и B са двата триъгълника, разположени съответно над и под отсечката, свързваща точките $(0,0)$ и $(1,1)$, с хипотенузи тази отсечка и трети върхове съответно точките с координати $(0,1)$ и $(1,0)$, а множеството C е самата отсечка.



Фигура 2.3.1

Функцията f е непрекъсната в множеството A, защото е частно на две непрекъснати функции, със знаменател $y^2 \neq 0$ в A. Аналогично, тя е непрекъсната и в B, защото там знаменателят е $x^2 \neq 0$. Остава да се изследва поведението на функцията само върху отсечката C. За целта, нека точката $(x_0, y_0) = (x_0, x_0) \in C$ и да разгледаме редицата

$$\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}, \quad (x_n, y_n) \in A$$

с граница точката (x_0, x_0). За границата на съответната редица от стойности на функцията имаме

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{y_0^2} = \frac{1}{x_0^2} \neq 0, \text{ ако } x_0 \neq 0, \text{ а } f(x_0, x_0) = 0,$$

което означава, че функцията е прекъсната в точката $(x_0, x_0) \neq (0, 0)$ (ако $(x_n, y_n) \in B$, то $\lim f(x_n, y_n) = -1/x_0^2 \neq f(x_0, x_0) = 0$).

В случай, че $x_0 = 0$, за границата $\lim f(x_n, y_n)$ получаваме, че е ∞ (съответно $-\infty$), а $f(0, 0) = 0$, което означава, че f е прекъсната и в точката (0,0).

В заключение можем да отбележим, че разглежданата функция е непрекъсната в целия квадрат D, в който е дефинирана, с изключение на точките от неговия диагонал C, където е прекъсната. $\square$

Дефиниция 2.3.4 (за съставна функция) *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, $f : A \to \mathbb{R}$ и $x_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $k = 1 \div m$. Полагайки $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots x_m(t)) \in A$ за всяко $t \in (\alpha, \beta)$, съставната функция $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t))$ се дефинира с формулата*

$$F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots x_m(t)). \tag{2.3.1}$$

Теорема 2.3.1 *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество и $f : A \to \mathbb{R}$, интервалът $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ и $x_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ за $k = 1 \div m$. Нека освен това $x = (x_1(t), x_2(t), \dots x_m(t)) \in A$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$ и x_k са непрекъснати в точката $t_0 \in (\alpha, \beta)$ за $\forall k = 1 \div m$, а f е непрекъсната в $x^0 = x(t_0)$. Тогава функцията $F(t) = f \circ x(t) = f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots x_m(t))$ е непрекъсната в точката t_0.*

Доказателство. Нека $t_k \in (\alpha, \beta)$ за $k \in \mathbb{N}$ и $t_k \to t_0$. Да означим $x^{(k)} = (x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_m(t_k))$. Тъй като $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ са непрекъснати функции, то $x^{(k)}$ клони към x^0. От непрекъснатостта на $f(x)$ получаваме, че $F(t_k) = f(x^{(k)}) \to f(x^0) = F(t_0)$. $\square$

Забележка 2.3.2 *Последната теорема и твърдението за аритметични действия с непрекъснати функции (накратко резюмирано в Забележка 2.3.1) позволяват да се получат голямо количество непрекъснати функции.*

2.4 Равномерна непрекъснатост на функция на няколко променливи

Продължаваме нататък с дефиницията за равномерна непрекъснатост на функция на повече променливи. И това понятие се пренася от едномерния случай почти без изменения.

Дефиниция 2.4.1 *Нека $A \subset \mathbb{R}^m$ и $f : A \to \mathbb{R}$. Функцията f се нарича равномерно непрекъсната в A, ако за всяко $\varepsilon > 0$, съществува такава $\delta = \delta(\varepsilon)$, че за всеки две точки $x', x'' \in A$, за които разстоянието $\rho(x', x'') = \|x' - x''\| < \delta$, да следва, че $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Тук веднага може да се направи следната забележка.

Забележка 2.4.1 *Ако една функция е равномерно непрекъсната в дадено множество, то тя е непрекъсната в него. Обратното невинаги е вярно.*

За по-задълбочено изясняване на понятието равномерна непрекъснатост да разгледаме следния пример.

Пример 2.4.1 *Тук са разгледани две функции, дефинирани в $\mathbb{R}^2$, и са изследвани за непрекъснатост и равномерна непрекъснатост в дадени множества, както следва:*

а) $f(x, y) = x^2 + y^2$ *е непрекъсната в* $\mathbb{R}^2$*, но не е равномерно непрекъсната в него,*

б) $f(x, y) = x^2 + y^2$ *е равномерно непрекъсната в правоъгълника* $[0, 2] \times [0, 3]$,

в) $f(x, y) = \cos(x + y)$ *е равномерно непрекъсната в* $\mathbb{R}^2$.

Нека $x, y, h, k \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. За да разгледаме първите две подточки, се нуждаем от модула на разликата $f(x+h, y+k) - f(x, y)$, който може да се представи по следния начин:

$$|f(x+h,y+k)-f(x,y)| = |(x+h)^2+(y+k)^2-(x^2+y^2)| = |2xh+2yk+h^2+k^2|. \tag{2.4.1}$$

Започвайки с подточка а), първо ще установим непрекъснатостта на f в $\mathbb{R}^2$.

а) 1. Разликата (2.4.1) може да бъде оценена по следния начин

$$|f(x+h, y+k) - f(x, y)| \leqq |h||2x+h| + |k||2y+k|. \tag{2.4.2}$$

Нека сега да означим

$$\delta_1 = \min\left(\frac{\varepsilon}{2(2|x|+1)}, 1\right), \quad \delta_2 = \min\left(\frac{\varepsilon}{2(2|y|+1)}, 1\right),$$

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = \min\left(\frac{\varepsilon}{2(2|x|+1)}, \frac{\varepsilon}{2(2|y|+1)}, 1\right),$$

и нека $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$. Тогава $|h| < \delta$ и $|k| < \delta$, и следователно е изпълнено неравенството

$$|f(x+h, y+k) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

откъдето следва непрекъснатостта на f в $\mathbb{R}^2$.

а) 2. Доказателството, че $f(x, y)$ не е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}^2$, може да се извърши с допускане на противоположното. Наистина, от допускането, че $f(x, y)$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}^2$, следва, че съществува такава $\delta = \delta(\varepsilon)$, че за всеки h и k, за които $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$, да следва $|f(x+h, y+k) - f(x, y)| < \varepsilon, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Нека сега $h = \dfrac{\delta}{2}$ и $k = \dfrac{\delta}{2}$, тогава $\sqrt{h^2+k^2} = \sqrt{\dfrac{\delta^2}{4} + \dfrac{\delta^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{\delta^2}{2}} < \delta$. Следователно, предвид (2.4.1) и предположената равномерна непрекъснатост, за $\forall x, y \in \mathbb{R}$ е изпълнено неравенството

$$|f(x+h, y+k) - f(x, y)| = \left|\delta x + \delta y + \frac{\delta^2}{2}\right| = \delta\left|x + y + \frac{\delta}{2}\right| < \varepsilon.$$

Последното е невъзможно за достатъчно "големи" x и y, което води до противоречие.

Следователно, разглежданата функция е непрекъсната в $\mathbb{R}^2$, но не е равномерно непрекъсната.

б) За доказване, че $f(x,y) = x^2+y^2$ е равномерно непрекъсната в правоъгълника $[0,2]\times[0,3] \subset \mathbb{R}^2$, отново използваме неравенството (2.4.2), т. е.

$$|f(x+h,y+k) - f(x,y)| \leqq |h||2x+h| + |k||2y+k|,$$

вземайки $(x,y),(x+h,y+k) \in [0,2]\times[0,3]$, $\delta = \min\left(\dfrac{\varepsilon}{12}, 1\right)$ и $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$. Тогава $|h| < \delta$, $|k| < \delta$, $|2x+h| \leqq 2\,|x|+|h| \leqq 2.2+1 = 5$ и $|2y+k| \leqq 2\,|y| + |k| \leqq 2.3+1 = 7$, откъдето

$$|f(x+h,y+k) - f(x,y)| \leqq 5|h| + 7|k| < \frac{5\varepsilon}{12} + \frac{7\varepsilon}{12} = \varepsilon.$$

Следователно функцията $f(x,y) = x^2+y^2$ е равномерно непрекъсната в множеството $[0,2]\times[0,3]$.

в) Нека $x,y,h,k \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\sqrt{k^2+h^2} < \delta$ ($\Rightarrow |h| < \delta$ и $|k| < \delta$).

За пресмятане на разликата $f(x+h,y+k) - f(x,y)$ се използва тригонометричното тъждество $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, а за оценяване на нейния модул – тригонометричните неравенства $|\sin x| \leq 1$ и $|\sin x| \leq |x|$. При извършване на тези пресмятания получаваме последователно:

$$|\cos(x+y+k+h) - \cos(x+y)| = 2\left|\sin\frac{k+h}{2}.\sin\frac{2x+2y+k+h}{2}\right|$$

и

$$|f(x+h,y+k) - f(x,y)| \leqq 2\left|\sin\frac{k+h}{2}\right| \leqq |k| + |h| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

откъдето автоматично следва равномерната непрекъснатост на функцията $f(x,y) = \cos(x+y)$ в равнината $\mathbb{R}^2$. $\square$

Теоремата на Вайерщрас за непрекъснати функции върху краен и затворен интервал лесно се пренася за случая на непрекъснати функции върху компактни подмножества на $\mathbb{R}^m$ (т.е. ограничени и затворени). Доказателствата отново се основават на Дефиниция 1.5.6 и 1.4.9 за компактно множество

Теорема 2.4.1 (на Вайерщрас) *Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K. Тогава*

1) f е ограничена в K, т.е. съществуват $m, M \in \mathbb{R}$, такива че за всички $x \in K$ е изпълнено неравенството $m \leq f(x) \leq M$.

2) f достига най-малката и най-голямата си стойност в K, т.е. съществуват точки $x^0, y^0 \in K$, такива че

$$f(x^0) = \inf_{x\in K} f(x) \quad \text{и} \quad f(y^0) = \sup_{y\in K} f(x).$$

Доказателство. Започваме с ограничеността на функцията f.

1) Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в компактното множество $K \subset \mathbb{R}^m$. Да допуснем, че f не е ограничена например отгоре. Тогава съществува редица от точки $x^{(k)} \in K$ такива, че $f(x^{(k)}) \geq k$. Според Дефиниция 1.5.6 може да се избере нейна сходяща подредица $x^{k_l} \to x^0 \in K$. Тогава, от една страна, $f(x^{k_l}) \geq k_l$ и следователно $f(x^{(k_l)}) \to \infty$. От друга страна, от непрекъснатостта на f в точката x^0 следва, че $f(x^{(k_l)}) \to f(x^0)$, и полученото противоречие доказва, че функцията е ограничена отгоре. Аналогично се доказва и ограничеността отдолу.

   Доказателството може да се извърши и с използването на Дефиниция 1.4.9, и то е изложено по-долу. Наистина, нека $\varepsilon > 0$ и $\xi \in K$. Тъй като функцията f е непрекъсната в точката ξ, то съществува такова $\delta_\xi = \delta(\xi, \varepsilon)$, че за всички $x \in K \cap B(\xi, \delta_\xi)$ е изпълнено неравенството $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$, т.е. $f(\xi) - \varepsilon < f(x) < f(\xi) + \varepsilon$. Това показва, че в множеството $K \cap B(\xi, \delta_\xi)$ функцията f е ограничена отдолу с числото $f(\xi) - \varepsilon$, а отгоре – с $f(\xi) + \varepsilon$. Очевидно фамилията $\{B(\xi, \delta_\xi)\}_{\xi\in K}$ представлява отворено покритие на множеството K ($\xi \in K \Rightarrow \xi \in B(\xi, \delta_\xi) \Rightarrow \xi \in \cup_{\xi\in K} B(\xi, \delta_\xi)$). Тогава, тъй като K е компактно, съгласно Дефиниция 1.4.9 от нея може да се избере крайно подпокритие. Нека $\{B(\xi_k, \delta_{\xi_k})\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$ е това крайно подпокритие. В такъв случай за всяко $k = 1 \div n$ и за всички $x \in B(\xi_k, \delta_{\xi_k}) \cap K$ е изпълнено неравенството $f(\xi_k) - \varepsilon < f(x) < f(\xi_k) + \varepsilon$. След въвеждане на означенията

$$m = \min_{k=1 \div n} \{f(\xi_k) - \varepsilon\}, \quad M = \max_{k=1 \div n} \{f(\xi_k) - \varepsilon\},$$

последните неравенства придобиват вида $m \le f(x) \le M$ навсякъде в компактното множество K.

2) Нека $M = \sup\limits_{x \in K} f(x)$. Тогава за всяко естествено k, числото $M - \dfrac{1}{k}$ вече не е горна граница за стойностите на функцията, и ние можем да намерим точка $x^{(k)} \in K$, такава че $M - \dfrac{1}{k} < f(x^{(k)}) \le M$. Отново да изберем сходяща подредица $x^{(k_l)} \to x^0 \in K$. Като извършим граничен преход в неравенствата $M - \dfrac{1}{k_l} < f(x^{(k_l)}) \le M$, получаваме $M \le f(x^0) \le M$, т.е. $f(x^0) = M$. Твърдението за достигане на точната долна граница (inf) се доказва аналогично. □

Пример 2.4.2 *Тук разгледаните две функции, дефинирани и непрекъснати в $\mathbb{R}^2$, са изследвани за максимум и минимум в различни подмножества на $\mathbb{R}^2$.*

а) функцията $f(x,y) = x^2 + y^2$ достига максимума и минимума си в правоъгълника $P = [0,1] \times [2,7]$ и в затворения кръг $\widetilde{B}(0;1) = [B(0;1)]$ (Дефиниция 1.4.2 и 1.4.3),

б) функцията $f(x,y) = x^2 + y^2$ не достига максимума си в отворения кръг $B(0;1)$,

в) функцията $f(x,y) = x^2 + y^2$ не достига минимума си в множеството $D = [B(0;1)] \setminus \{(0,0)\}$,

г) функцията $f(x,y) = x^2 + y^2$ достига както максимума, така и минимума си в множеството $D = [B(0;1)] \setminus \{(1,0)\}$,

д) функцията $f(x,y) = x + y$, не достига максимума си в множеството $D = [B(0;1)] \setminus \{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$.

Докато множествата от първата подточка – правоъгълникът P и кръгът $\widetilde{B}(0;1) = [B(0;1)]$ – са ограничени и затворени и следователно са компактни (според Забележка 1.4.2), то в останалите подточки положението е различно.

а) Както е показано в Пример 2.4.1, дадената функция е непрекъсната в $\mathbb{R}^2$, следователно е непрекъсната и в нейните подмножества правоъгълника P и кръга $[B(0;1)]$, които са компактни. Тогава съгласно теоремата на Вайерщрас (Теорема 2.4.1), функцията $f(x,y) = x^2+y^2$ достига максимума и минимума си във всяко едно от двете множества, т.е., както в правоъгълника $P = [0,1]\times[2,7]$, така и в затворения кръг $[B(0;1)]$.

б) Функцията $f(x,y) = x^2+y^2$ е непрекъсната в отворения кръг $B(0;1)$, но то е отворено множество, и следователно не е компактно множество. Следователно теоремата на Вайерщрас не е приложима. Обаче в отворения кръг $B(0;1)$ е изпълнено неравенството $0 \leq x^2+y^2 < 1$, откъдето следва, че $0 \leq f(x,y) = x^2+y^2 < 1$ в кръга $B(0;1)$, т.е. стойностите на функцията f са в целия интервал $[0,1)$. Обаче, тъй като в интервала $[0,1)$ няма най-голямо число, f не достига максимума си в отвореното множество $B(0;1)$.

в) Множеството $D = [B(0;1)] \setminus \{(0,0)\}$ също не е затворено, и следователно не е компактно. Обаче там е изпълнено неравенството $0 < x^2+y^2 \leq 1$, откъдето $0 < f(x,y) \leq 1$. Тъй като в интервала $(0,1]$ няма най-малко число, функцията $f(x,y) = x^2+y^2$ не достига минимума си в множеството $[B(0;1)] \setminus \{(0,0)\}$.

г) Множеството $D = [B(0;1)] \setminus \{(1,0)\}$ не е затворено, и следователно не е компактно. В отворения кръг $B(0;1)$ е изпълнено неравенството $0 \leq x^2+y^2 < 1$. В точката $(1,0)$, която е от контура и е единствената му точка, която не лежи в D, е изпълнено $1^2+0^2 = 1$, но във всички останали точки на контура $C(0;1) = \partial D$ също е изпълнено тъждеството $x^2+y^2 = 1$. Следователно $0 \leq f(x,y) \leq 1$ в D, поради което функцията $f(x,y) = x^2+y^2$ достига както максимума, така и минимума си в множеството, като минимумът се достига в точката $(0,0)$ и има стойност 0, а максимумът се достига в точките от единичната окръжност, различни от точката $(1,0)$, и има стойност 1.

д) Върху компактното множество [B(0;1)] функцията $f(x,y) = x+y$

достига както максимума, така и минимума си. В този пример се интересуваме само от максимума. Ясно е, че той се достига някъде по единичната окръжност $C(0;1)$ (сумата $x+y$, когато (x,y) се изменя по отсечка-радиус на $C(0;1)$, е най-голяма върху самата окръжност), която може да се представи по следния начин

$$x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha, \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

Тогава функцията се преобразува във вида $h(\alpha) = f(x(\alpha), y(\alpha)) = \sqrt{2}\cos(\pi/4 - \alpha)$ за $\alpha \in [0, 2\pi)$ и очевидно има най-голяма стойност, равна на $\sqrt{2}$, само за $\alpha = \pi/4$. Но тогава функцията f достига своя максимум в [B(0;1)] само за точката с координати $x = \sqrt{2}/2$ и $y = \sqrt{2}/2$, която не е точка от множеството $D = [B(0;1)] \setminus \{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$. Следователно тя не достига максимума си в множеството D.

Теорема 2.4.2 (на Кантор) *Нека множеството $K \subset \mathbb{R}^m$ е компактно и функцията $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната върху K. Тогава f е равномерно непрекъсната върху K.*

Доказателство. Да допуснем, че функцията f, дефинирана и непрекъсната върху компактното множество K, не е равномерно непрекъсната. Тогава съществува число $\varepsilon_0 > 0$ такова, че по-нататъшната част от дефиницията не е изпълнена, т.е. за всяко $\delta > 0$ съществуват точки $x_\delta, y_\delta \in K$, такива че $\rho(x_\delta, y_\delta) < \delta$, но $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$. Да дадем на δ стойности $\delta = \delta_k = \dfrac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ и да означим за удобство $x^{(k)} = x_{\delta_k}$, $y^{(k)} = y_{\delta_k}$. Тогава тези точки удовлетворяват условията $\left|x^{(k)} - y^{(k)}\right| < \dfrac{1}{k}$ и $\left|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})\right| \geq \varepsilon_0$. Нека $\left\{x^{(k_l)}\right\}_{l=1}^{\infty}$ е сходяща подредица на редицата $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ с граница $x^0 \in K$. Очевидно е, че редицата $\left\{y^{(k_l)}\right\}_{l=1}^{\infty}$ клони към същата граница. Тогава, поради непрекъснатостта на f е изпълнено

$$f(x^{(k_l)}) \to f(x^0), \quad f(y^{(k_l)}) \to f(x^0) \quad \text{и} \quad f(x^{(k_l)}) - f(y^{(k_l)}) \to 0,$$

което противоречи на условието $|f(x^{(k_l)}) - f(y^{(k_l)})| \geq \varepsilon_0$. □

Изложеният по-долу пример е илюстрация за използването на теоремата.

Пример 2.4.3 *Функцията $f(x,y) = x^2 + y^2$ е равномерно непрекъсната в правоъгълника $P = [0,1] \times [2,7]$.*

Наистина, както е показано в Пример 2.4.1, дадената функция f е непрекъсната в $\mathbb{R}^2$, следователно е непрекъсната и в нейното подмножество правоъгълника P, който е компактно множество. Следователно f е равномерно непрекъсната в правоъгълника $P = [0, 1] \times [2, 7]$. $\square$

Глава 3

Частни производни. Диференцируемост на функция на две и повече променливи

3.1 Дефиниция на частна производна

Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество, точката $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \dots x_i^0, \dots, x_m^0\right)$ принадлежи на множеството D и $U_{x^0} \subset D$ е околност на точката x^0, а $U_{x_i^0} \subset \mathbb{R}$ е околност на x_i^0 за $i = 1, 2, \dots, m$, като при това точката $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0\right) \in U_{x^0}$ за всички стойности на $x_i \in U_{x_i^0}$. Нека освен това са дефинирани функциите f и g съответно в D и $U_{x_i^0}$, т. е.

$$f : D \to \mathbb{R},\ g : U_{x_i^0} \to \mathbb{R} \text{ и } g(x_i) = f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0\right).$$

По-нататък могат да се разгледат производните на написаните по-горе функции $g(x_i)$ (стига те да съществуват) за $i = 1, 2, \dots, m$. С други думи, може да се диференцира функцията $f(x)$ по една от променливите $x_1, x_2, \dots, x_m$, като останалите променливи са фиксирани. Така стигаме до следната дефиниция.

Дефиниция 3.1.1 *Производната, ако съществува, на функцията g в точката x_i^0 се нарича частна производна на функцията f (по променливата x_i) в точката x^0. Използва се означението $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x^0)$.*

Забележка 3.1.1 *Да отбележим, че всъщност частната производна на функцията f относно променливата x_i е равна на границата на функцията $\varphi(h_i) := \dfrac{g(x_i^0 + h_i) - g(x_i^0)}{h_i}$ при $h_i \to 0$ (ако тази граница съществува), т.е.*

$$\lim_{h_i \to 0} \varphi(h_i) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \quad (\textit{ако} \quad \textit{границата}\ \exists).$$

За илюстрация на въведеното понятие е разгледан примерът, даден подолу.

Пример 3.1.1 *Да се намерят първите частни производни (ако съществуват) на следните функции:*

а) $f(x, y, z) = e^{4x+3y} + xy^2z^3 + 1111e^{\pi}$ *за произволна точка* $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$,

б) $f(x, y) = |x + y|$ *в точката* $(0, 0)$,

в) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ *в равнината* $\mathbb{R}^2$.

а) Да се намери частната производна по някоя от променливите x, y или z, означава да се фиксират останалите променливи и да се диференцира получената функция. Така например, за да се намери частната производна $f'_x(x_0, y_0, z_0)$, се фиксират останалите променливи $y = y_0$ и $z = z_0$, след което се диференцира функцията $g(x) = f(x, y_0, z_0)$ по променливата x в точката x_0. В резултат на това се получава, че

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 4e^{4x_0+3y_0} + y_0^2 z_0^3.$$

Аналогично, пресмятането на останалите две частни производни дава

$$f'_y(x_0, y_0, z_0) = 3e^{4x_0+3y_0} + 2x_0 y_0 z_0^3, \quad \text{и} \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 3x_0 y_0^2 z_0^2.$$

б) Намирането на частната производна $f'_x(0, 0)$ по променливата x се свежда до пресмятане на границата (ако съществува) на частното

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h}, \quad \text{когато } h \to 0.$$

Обаче $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$, която, както е добре известно, не съществува. Следователно и частната производна $f'_x(0,0)$ по променливата x също не съществува. Аналогично се получава, че и другата частна производна $f'_y(0,0)$ не съществува.

в) Намирането на частните производни $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ за точки $(x,y) \neq (0,0)$ се извършва по формулата за производна на частно, след фиксиране на променливите, по които не се диференцира. Така се получава следният резултат:

$$f'_x(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \text{ и } f'_y(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \text{ когато } (x,y) \neq (0,0).$$

За намирането на частните производни в точката $(0,0)$ отново се прилага Дефиниция 3.1.1 и Забележка 3.1.1. Тъй като границите

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0,$$

съществуват и са равни на нула, то и търсените частни производни съществуват и освен това

$$f'_x(0,0) = 0 \quad \text{и} \quad f'_y(0,0) = 0.$$

Следователно дадената функция има частни производни във всички точки на равнината $\mathbb{R}^2$. □

Забележка 3.1.2 *Трябва да се отбележи, че (за разлика от случая на функция на една променлива) наличието на частни производни, даже по всички променливи и във всяка точка, още не означава, че функцията е "добра". Например разгледаната току-що функция от Пример 3.1.1, подточка в), има частни производни в цялата равнина* $\mathbb{R}^2$*, но както е изяснено в Пример 2.3.2, тя е прекъсната в точката* $(0;0)$*. Напротив, функцията от подточка б) е непрекъсната в* $\mathbb{R}^2$*, но в точката* $(0;0)$ *няма частни производни. С други думи, връзка между непрекъснатост и съществуване на частна производна изобщо не може да се търси в общия случай.*

3.2 Частни производни от по-висок ред

Нека $x^0 \in \mathbb{R}^m$, отвореното множество $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ е околност на точката x^0 и функцията f е дефинирана в можеството U, т.е. $f : U \to \mathbb{R}$. Нека също така да съществуват частните производни ${f'}_{x_j}$ (които се наричат също първи частни производни) за всички $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in U$ и $j = 1, 2, \ldots, m$. Функциите ${f'}_{x_j}$, естествено, също са функции на x и техните частни производни (стига да съществуват) също може да се търсят. Така например частната производна $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$, ако съществува, се нарича втора частна производна на f и се означава с $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ или ${f''}_{x_j x_k}$. Ако $j \neq k$, частните производни се наричат смесени частни производни от втори ред, а ако $j = k$ – чисти частни производни от втори ред и се използват още следните означения

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = {f''}_{x_j x_k}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = {f''}_{x_j x_j} = {f''}_{x_j^2}.$$

Вземайки частните производни на вторите частни производни (ако съществуват), се получават трети частни производни и т.н. Аналогично се дефинират частни производни от произволен ред.

Дефиниция 3.2.1 *Частната производна на частната производна от $n-1$ ред, $n = 1, 2, \ldots$ (ако съществува), се нарича частна производна от n-ти ред. За удобство самата функция се разглежда като частна производна от нулев ред. Частните производни, получени при диференциране по различни променливи се наричат смесени частни производни, а получените при диференциране само по една и съща променлива се наричат чисти частни производни.*

По-нататък е даден пример, свързан с пресмятането на смесените частни производни от втори ред.

Пример 3.2.1 *Да се пресметнат f''_{xy} и f''_{yx} (ако съществуват), на следните функции:*

а) $f(x, y) = x^3 \sin(6y) + x^2 y^3 + 2222$, за произволна точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *б)* $f(x,y,z) = e^{4x+3y} + xy^2z^3 + 1111e^{\pi}$, *за произволна точка* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

в)$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & |x|+|y| \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$ *в точката* $(0,0)$.

а) Тъй като $f'_x(x,y) = 3x^2\sin(6y) + 2xy^3$ и $f''_{xy}(x,y) = (f'_x(x,y))'_y$, то за смесената частна производна от втори ред $f''_{xy}(x,y)$ се получава изразът $f''_{xy}(x,y) = \left(3x^2\sin(6y) + 2xy^3\right)'_y = 18x^2\cos(6y) + 6xy^2$.

Аналогично, $f'_y(x,y) = 6x^3\cos(6y) + 3x^2y^2$, откъдето смесената частна производна $f''_{yx}(x,y) = \left(6x^3\cos(6y) + 3x^2y^2\right)'_x = 18x^2\cos(6y) + 6xy^2$.

б) В този случай за първата частна производна по променливата x се получава $f'_x(x,y,z) = 4e^{4x+3y} + y^2z^3$, откъдето смесената производна $f''_{xy}(x,y,z) = (f'_x(x,y,z))'_y = \left(4e^{4x+3y} + y^2z^3\right)'_y = 12e^{4x+3y} + 2yz^3$ и също $f''_{yx}(x,y,z) = \left(f'_y(x,y,z)\right)'_x = \left(4e^{4x+3y} + 2xyz^3\right)'_x = 12e^{4x+3y} + 2yz^3$.

в) За пресмятане на смесените частни производни в точката $(0,0)$ се нуждаем от първите частни производни не само в точката $(0,0)$, но и в цяла нейна околност, т.е. и за точки $(x,y) \neq (0,0)$. Като използваме метода, от Пример 3.1.1, получаваме за f'_x следния израз

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

и съответно за f'_y – израза

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Пресмятането на вторите смесени частни производни е свързано с намирането на границите

$$\lim_{k\to 0} \frac{f'_x(0,0+k) - f'_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'_y(0+h,0)-f'_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to 0}1=1.$$

В заключение, последните две равенства водят до резултата

$$f''_{xy}(0,0)=0 \quad \text{и} \quad f''_{yx}(0,0)=1,$$

откъдето незабавно следва, че $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

И така, както се вижда от току-що разгледания пример, смесените частни производни понякога съвпадат, а понякога – не. Оказва се, обаче, че при определени предположения те съвпадат, т.е. смесените частни производни не зависят от реда на диференциране. По-точно, валидна е например следната теорема, формулирана за простота в равнината $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3.2.1 (за равенство на смесените производни) *Нека точката $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ и нека функцията f е дефинирана в отвореното множество $U=U_{(x_0,y_0)}\subset\mathbb{R}^2$, което е нейна околност, т.е. $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$. Нека освен това съществуват частните производни $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ за всички $(x,y)\in U$ и f''_{xy}, f''_{yx} са непрекъснати в точката (x_0,y_0). Тогава е изпълнено равенството*

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0). \tag{3.2.1}$$

Доказателство. Без ограничение на общността може да се счита, че околността $U=U_{(x_0,y_0)}$ представлява δ-околност на точката (x_0,y_0), т.е. U е отворен кръг с център точката (x_0,y_0) и радиус δ. Нека функцията f е дефинирана в U, заедно с частните си производни $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ и нека Δx и Δy са фиксирани така, че $\Delta x^2+\Delta y^2<\delta^2$. По-нататък са използвани символите Δ_x и Δ_y за означаване на нарастването на функцията f относно променливата x и съответно относно y в точката (x_0,y_0). Въвеждайки още означенията

$$\Delta_{xy}f=\Delta_y(\Delta_x f) \quad \text{и} \quad \Delta_{yx}f=\Delta_x(\Delta_y f),$$

доказателството продължава в 3 стъпки. Първо е доказано, че

$$\Delta_{xy}f=\Delta_{yx}f, \tag{3.2.2}$$

след което е приложена теоремата на Лагранж за крайните нараствания поотделно към $\Delta_{xy}f$ и $\Delta_{yx}f$, откъдето след граничен преход е получено равенството (3.2.1).

1) Започвайки с пресмятането на лявата страна на (3.2.2), най-напред е въведено означението

$$\varphi(y) := f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y),$$

откъдето се получава последователно

$$\Delta_{xy} f = \Delta_y(\Delta_x f(x_0, y_0)) = \Delta_y(f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)),$$

$$\Delta_{xy} f = \Delta_y(\varphi(y_0)) = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0) = \tag{3.2.3}$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) -$$

$$-[f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)],$$

т.е.

$$\Delta_{xy} f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0). \tag{3.2.4}$$

Аналогично, означавайки

$$\psi(x) := f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

за $\Delta_{yx} f$ се получава съответно

$$\Delta_{yx} f = \Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)) = \Delta_x(f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)),$$

$$\Delta_{yx} f = \Delta_x(\psi(x_0)) = \psi(x_0 + \Delta x) - \psi(x_0) = \tag{3.2.5}$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) -$$

$$-[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)],$$

откъдето

$$\Delta_{yx} f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0). \tag{3.2.6}$$

Сравняването на (3.2.4) и (3.2.6) недвусмислено показва верността на равенството (3.2.2).

2) От съществуването на частните производни f'_x и f'_y следва, че съществуват и производните φ', ψ' на горе въведените функции и са в сила равенствата
$$\varphi'(y) = f'_y(x_0 + \Delta x, y) - f'_y(x_0, y),$$
$$\psi'(x) = f'_x(x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x, y_0).$$
Започвайки с преобразуването на Δ_{xy}, предвид (3.2.3) и теоремата на Лагранж, последователно се получава, че съществуват числа $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, такива че
$$\begin{aligned}\Delta_{xy} f &= \Delta_y(\varphi(y_0)) = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0) = \Delta y \varphi'(y_0 + \theta_2 \Delta y)\\ &= \Delta y [f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)]\\ &= \Delta y \Delta x f''_{yx}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y),\ 0 < \theta_1, \theta_2 < 1.\end{aligned}$$
Аналогично, прилагането на теоремата на Лагранж за Δ_{yx} води до съществуването на числа $0 < \theta_3, \theta_4 < 1$, за които
$$\Delta_{yx} f(x_0, y_0) = \Delta x \Delta y f''_{xy}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y),\ 0 < \theta_3, \theta_4 < 1.$$
Най-сетне, отчитането на (3.2.2) и последните две равенства дава
$$f''_{yx}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f''_{xy}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y). \qquad (3.2.7)$$

3) Преди да преминем към граничния преход, да припомним, че f''_{xy} и f''_{yx} са непрекъснати в точката (x_0, y_0). Нека сега да оставим $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, и тъй като тогава аргументите
$$(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \quad \text{и} \quad (x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y)$$
клонят към точката (x_0, y_0), след граничен преход в (3.2.7) се получава $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$, което не е нищо друго, а исканото равенство (3.2.1). $\square$

Забележка 3.2.1 *В заключение да отбележим, че от доказаната теорема по индукция следва, че ако смесените частни производни от n-ти ред на функция на m променливи са непрекъснати в някоя точка, а частните производни от по-нисък ред са непрекъснати в околност на тази точка, то частните производни от n-ти ред не зависят от реда на диференциране.*

3.3 Диференцируемост на функция

Нека $x^0 \in \mathbb{R}^m$ и отвореното множество $U \subset \mathbb{R}^m$ е околност на точката x^0, която без ограничение на общността може да се счита, че представлява δ-околност на точката x^0, т.е. U е отвореното кълбо $B(x^0;\delta)$ с център точката x^0 и радиус δ. Нека функцията f е дефинирана в можеството $U = B(x^0;\delta)$, т.е. $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Дефиниция 3.3.1 *Функцията $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ се нарича диференцируема в точката $x^0 \in U$, ако съществуват числа $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и функция $\varepsilon(x^0, x - x^0)$, дефинирана за всички допустими стойности на $x \in U$ и $x - x^0 = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_m - x_m^0)$, като при това*

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} A_k(x_k - x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0)\|x - x^0\| \tag{3.3.1}$$

и $\lim\limits_{\|x-x^0\|\to 0} \varepsilon(x^0, x - x^0) = 0.$

Дефиниция 3.3.2 *Функцията $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ се нарича диференцируема в отвореното множество U, ако тя е диференцируема във всяка негова точка.*

Забележка 3.3.1 *Числата $A_1, A_2, \ldots, A_m$ са определени еднозначно.*

Наистина, нека например $B_1, B_2, \ldots, B_m$ да имат същото свойство с подходяща функция $\delta(x^0, x - x^0)$. Тогава

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} A_k(x_k - x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0)\|x - x^0\|,$$

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} B_k(x_k - x_k^0) + \delta(x^0, x - x^0)\|x - x^0\|,$$

откъдето

$$\sum_{k=1}^{m} (A_k - B_k)(x_k - x_k^0) = (\delta - \varepsilon)\|x - x^0\|. \tag{3.3.2}$$

Сега, вземайки в частност $x - x^0 = (h, 0, 0, \ldots, 0)$ и замествайки с него в (3.3.2), получаваме

$$(A_1 - B_1)h = \big(\delta(x^0, (h, 0, \ldots, 0)) - \varepsilon(x^0, (h, 0, \ldots, 0))\big)\,|h|.$$

Следователно $|A_1 - B_1| = |\delta(x^0, (h, 0, \dots, 0)) - \varepsilon(x^0, (h, 0, \dots, 0))| \to 0$ при $h \to 0, h \neq 0$, поради което $A_1 = B_1$.

Аналогично, вземайки например $(x - x^0 = (0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0))$ (т.е. $x_k - x_k^0 = h$ и $x_j - x_j^0 = 0$ за $j \neq k$), следва, че $A_k = B_k$ и за $k = 2 \div m$, което означава, че $A_k = B_k$ за $k = 1 \div m$.

Теорема 3.3.1 *Ако функцията $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то тя е непрекъсната в нея.*

Доказателство. Следва автоматично от Дефиниция 3.3.1, и в частност от равенството (3.3.1). □

Пример 3.3.1 *Функцията* $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ *не е диференцируема в точката* $(0, 0)$.

Наистина, както е изяснено в Пример 2.3.2, функцията $f(x, y)$ е прекъсната в точката $(0, 0)$, и следователно не е диференцируема. Допускането на противоположното би довело до противоречие със заключението на Теорема 3.3.1. □

Преди да въведем следващата дефиниция, да вземем $h_k \in \mathbb{R}$ за $k = 1 \div m$ и $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$.

Дефиниция 3.3.3 *В случай на диференцируемост в точката x^0 на функцията $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, изразът*

$$df(x^0) \circ (h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_m h_m \tag{3.3.3}$$

(кратко df или $df(x^0)$) се нарича пълен (тотален) диференциал на функцията $f(x)$ в точката x^0.

По-надолу е коментирана разликата между формулите (3.3.1) и (3.3.3) и е дадена още една тяхна форма на записване.

Забележка 3.3.2 *Изразът df е линейна функция на $h_1, h_2, \dots, h_m$ и за тях няма ограничения, за разлика от $x - x^0$ в* (3.3.1).

Забележка 3.3.3 *Ако означим, както обикновено $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, и разгледаме линейна функция на x_k (за $k = 1, 2, \dots, m$), се получават полезни резултати, както следва.*

1) *Ако* a_k $(k = 1 \div m)$ *са реални константи и* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x_k$, *то в съответната формула* (3.3.1) *се получава* $A_k = a_k$ *за* $k = 1 \div m$ *и* $\varepsilon(x^0, x - x^0) = 0$, *поради което в този случай* (3.3.1) *и* (3.3.3) *имат съответно вида*

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x_k - x_k^0) \quad и \quad df(x^0) = \sum_{k=1}^{m} a_k h_k.$$

2) *В частност, ако* $a_k = 1, a_j = 0, j \neq k$, *то функцията* f *има вида* $f(x) = x_k$. *Тогава коефициентите от* (3.3.1) *са* $A_k = 1, A_j = 0, j \neq k$, *и следователно* (3.3.1) *и* (3.3.3) *се записват както следва*

$$f(x) - f(x^0) = (x_k - x_k^0) \quad и \quad df(x^0) = dx_k = h_k.$$

Затова най-често h_k *се означава с* dx_k *и формулата* (3.3.3) *придобива вида*

$$df(x^0) = A_1(x^0)dx_1 + A_2(x^0)dx_2 + \ldots + A_m(x^0)dx_m. \qquad (3.3.4)$$

Забележка 3.3.4 *Изясняването на въпроса, какво представляват величините* $A_k(x^0)$ *във формулите* (3.3.1) *и* (3.3.4), *както и ново доказателство за тяхната единственост, дава следващата теорема.*

Теорема 3.3.2 *Ако функцията* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *е диференцируема в точката* $x^0 \in U$, *то съществуват частните производни* $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ *в точката* x^0 *и освен това* $A_k(x^0) = \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ *за* $k = 1 \div m$.

Доказателство. Верността на теоремата следва директно от формула (3.3.1) и дефиницията за първа частна производна $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}$ на функцията f в точката x^0. $\square$

Забележка 3.3.5 *Вследствие на току-що изказаната теорема, ако функцията* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *е диференцируема в точката* $x^0 \in U$, *то формулите* (3.3.1) *и* (3.3.4) *се представят във вида:*

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}(x_k - x_k^0) + \varepsilon(x^0, x - x^0)\|x - x^0\|, \qquad (3.3.1')$$

отново при условието $\lim\limits_{\|x-x^0\|\to 0} \varepsilon(x^0, x-x^0) = 0$, *и съответно*

$$df(x^0) = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}dx_m. \qquad (3.3.4')$$

Пример 3.3.2 *За илюстрация на изложения по-горе материал са разгледани две функции, дефинирани и непрекъснати в цялата равнина* $\mathbb{R}^2$, *които не са диференцируеми в точката* $(0,0)$:
а) $f(x,y) = |x|(y+1)$, *б)* $f(x,y) = \sqrt{|x||y|}$.

а) Наистина, функцията f не е диференцируема в точката $(0,0)$, защото $f'_x(0,0)$ не съществува. Допускането на противоположното би довело до противоречие с Теорема 3.3.2.

б) Тъй като частните производни f'_x и f'_y в точката $(0,0)$ съществуват и $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 0$, то съгласно Теорема 3.3.2 следва, че $A_1 = A_2 = 0$. Следователно, като се отчете, че $x - x_0 = x - 0 = x$ и $y - y_0 = y - 0 = y$, (3.3.1) се записва във вида

$$f(x,y) - f(0,0) = 0 + 0 + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2},$$

т.е.

$$\sqrt{|x||y|} - 0 = \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \varepsilon(x,y) = \frac{\sqrt{|x||y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Диференцируемостта на f зависи от това, дали $\varepsilon(x,y)$ клони към нула едновременно с x и y, или не. За да пресметнем исканата граница, разглеждаме редиците с общ член $x_n = y_n = \dfrac{1}{n}$ за $n \in \mathbb{N}$, които клонят към нула (т. е. $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$), когато $n \to \infty$. Замествайки x_n и y_n в $\varepsilon(x,y)$, получаваме $\varepsilon(x_n, y_n) = \dfrac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{2n^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Последното показва, че f не е диференцируема в точката $(0,0)$. $\square$

Дефиниция 3.3.4 *Ако функцията* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *е диференцируема в точката* $x^0 \in U$, *то със следната формула се изразява нейната производна в точката* x^0

$$f'(x^0) = \left(f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \ldots, f'_{x_m}(x^0)\right). \qquad (3.3.5)$$

Забележка 3.3.6 *Ако се отчете още, че диференциалът на $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ може да се запише като $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_m)$, то диференциалът* $(3.3.4')$ *в точката x^0 приема възможно най-естествения вид, аналогичен на този в $\mathbb{R}$, а именно*

$$df(x^0) = f'(x^0)dx. \tag{3.3.6}$$

Дотук са формулирани и доказани само необходими условия за диференцируемост на функция. Сега предстои да бъде дадено едно достатъчно условие.

Теорема 3.3.3 *Ако функцията $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (да напомним, че U е δ-околност на точката x^0) притежава всичките частни производни $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ за $k = 1 \div m$ в отвореното множество U и освен това те са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то функцията f е диференцируема в точката x^0.*

Доказателство. За удобство доказателството е извършено за $m = 2$, т.е. в равнината $\mathbb{R}^2$. И така нека отвореното множество U е δ-околност на точката (x_0, y_0), в която е дефинирана функцията f, заедно с частните производни f'_x и f'_y. Избираме Δx и Δy така, че $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U$. Да отбележим по-нататък, че

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{3.3.7}$$
$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)],$$

и прилагайки теоремата на Лагранж за крайните нараствания за двата израза в квадратните скоби, (3.3.7) се свежда до

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x - f'_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 \Delta y)\Delta y \tag{3.3.8}$$

$$0 < \vartheta_1,\ \vartheta_2 < 1,$$

при което ϑ_1 и ϑ_2 зависят, разбира се, от избора на точката $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, т. е. от Δx и Δy.

Сега, ако означим

$$\varepsilon_1 = f'_x(x_0 + \vartheta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0),\ \varepsilon_2 = f'_y(x_0, y_0 + \vartheta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0), \tag{3.3.9}$$

поради непрекъснатостта на частните производни f'_x и f'_y в точката (x_0, y_0) имаме

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon_1 = \lim_{\rho\to 0}\varepsilon_2 = 0 \quad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}). \tag{3.3.10}$$

Замествайки (3.3.9) в (3.3.8) и означавайки след това $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1 \Delta x}{\rho} + \dfrac{\varepsilon_2 \Delta y}{\rho}$, получаваме последователно

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon\rho. \tag{3.3.11}$$

Тъй като поради (3.3.10) границата $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon = 0$, то диференцируемостта на функцията f в точката (x_0, y_0) следва от (3.3.11) (сравни с представянето (3.3.1$'$) и Дефиниция 3.3.1). В общия случай доказателството може да се извърши аналогично. $\square$

Забележка 3.3.7 *Условието за непрекъснатост на частните производни не е необходимо, т.е. ако дадена функция $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $x^0 \in U$, то съществуват частните производни на функцията f в тази точка, но не е задължително да са непрекъснати там.*

Следващият пример е илюстрация към тази забележка.

Пример 3.3.3 *Функцията f, дефинирана с равенството*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

удовлетворява следните условия:
1) Съществуват f'_x, f'_y за всички $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
2) f'_x, f'_y са прекъснати в точката $(0,0)$,
3) f е диференцируема в точката $(0,0)$.

Решението на трите подточки в примера е извършено по реда им на задаване. Първо е установено съществуването на частните производни, след това тяхната прекъснатост в нулата и най-накрая е доказано, че въпреки тази прекъснатост f е диференцируема в нулата.

1) Частните производни в точката $(0,0)$ са намерени с използване на дефиницията. За първата от тях получаваме

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0,$$

Аналогичен резултат се получава и за другата частна производна в точката $(0,0)$, т. е.

$$f'_x(0,0) = 0, \quad f'_y(0,0) = 0. \tag{3.3.12}$$

За $(x,y) \neq (0,0)$ частните производни се намират по правилото за диференциране на произведение и резултатът е записан по-долу, а именно

$$f'_x(x,y) = 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0), \tag{3.3.13}$$

аналогично

$$f'_y(x,y) = 2y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0). \tag{3.3.14}$$

2) Прекъснатост на f'_x и f'_y.
За показване на прекъснатостта на f'_x в точката $(0,0)$ се нуждаем от границата на израза (3.3.13), когато $x \to 0$ и $y \to 0$. Тъй като границата на първото събираемо е равна на 0, пресмятането на границата на (3.3.13) се свежда до намирането на

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} f_1(x,y) := \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}.$$

За целта вземаме редицата $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ с $x_n = y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}$ и тъй като $x_n^2 + y_n^2 = \dfrac{2}{4n\pi} = \dfrac{1}{2n\pi}$, пресмятаме $f_1(x_n, y_n) = 2\sqrt{n\pi}\, \cos 2n\pi$. Тогава, при $n \to \infty$ имаме

$$(x_n, y_n) \to (0,0), \quad \text{но} \quad f_1(x_n, y_n) = 2\sqrt{n\pi}\, \cos 2n\pi \to \infty,$$

и следователно

$$(x_n, y_n) \to (0,0), \quad \text{но} \quad \lim_{n\to\infty} f'_x(x_n, y_n) = 0 - \infty \neq f'_x(0,0) = 0.$$

Последното означава, че f'_x е прекъсната в точката $(0,0)$. Аналогично се показва и прекъснатостта на f'_y в точката $(0,0)$.

3) Диференцируемост на f в точката $(0,0)$.
За доказване на диференцируемостта, представяме f във вида (3.3.1′), т. е. $f(x,y) - f(0,0) = 0.(x-0) + 0.(y-0) + \varepsilon\|(x,y)-(0,0)\|$. Следователно

$$(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \varepsilon\sqrt{x^2+y^2},$$

откъдето заключаваме, че

$$\varepsilon(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} \to 0 \quad \text{при} \quad x\to 0,\ y\to 0.$$

Това доказва, че функцията f е диференцируема в точката $(0,0)$. □

В края на този параграф е дадена още една дефиниция, въвеждаща понятието непрекъсната диференцируемост.

Дефиниция 3.3.5 *Ако функцията $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ има частни производни в U (отворено множество, или просто околност на x^0) и тези частни производни са непрекъснати в точката $x^0 \in U$, то функцията f се нарича непрекъснато диференцируема в точката x^0. Ако тези частни производни са непрекъснати в множеството U, то функцията се нарича непрекъснато диференцируема в това множество*

Току-що изследваната функция е пример за функция, която е диференцируема в $(0,0)$, но не е непрекъснато диференцируема в тази точка.

Забележка 3.3.8 *Съпоставяйки дефинициите за диференцируемост на функция (Деф. 3.3.1) и непрекъсната диференцируемост (Деф. 3.3.5), и отчитайки Теорема 3.3.2 и Забележка 3.3.5, можем да отбележим, че понятието диференцируемост в точка е свързано със съществуване на диференциала в тази точка (формула (3.3.4′)), докато непрекъснатата диференцируемост е свързана със съществуване на непрекъснати частни производни в точката. По такъв начин диференцируемостта на функция е свързана с понятието диференциал, а непрекъснатата диференцируемост – с понятието частни производни. Наред с това, от непрекъснатата диференцируемост в точка (или в отворено множество) следва нейната диференцируемост в точката (или множеството), което е и съдържанието на Теорема 3.3.3.*

По-нататък да отбележим, че понякога се оказва възможно да бъде намерен диференциалът на диференциала на дадена функция, а след това и диференциалът на намерения резултат. Така се стига до понятието диференциал от по-висок ред (за пълнота самият диференциал на функцията се нарича още *диференциал от първи ред* или просто *първи диференциал* на функцията).

Дефиниция 3.3.6 *Диференциалът на диференциала от $n-1$ ред ($n = 2, 3, \dots$) от функцията f (ако съществува), се нарича диференциал от n-ти ред или n-ти диференциал на тази функция и се означава с $d^n f$.*

Вече установихме, че ако функцията $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ е два пъти непрекъснато диференцируема в точката $x^0 \in U$, то смесените частни производни в тази точка съвпадат. Затова в този случай за втория диференциал се получава следният резултат

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(x^0)\, d\,x_i\, d\,x_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f(x^0), \tag{3.3.15}$$

което, както се вижда, е *симетрична квадратична форма* на $d\,x_i$ ($i = 1 \div m$).

Аналогично, ако f е n пъти непрекъснато диференцируема в точката $x^0 \in U$, то $d^n f(x^0)$ съществува и се дава с формулата

$$d^n f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x^0). \tag{3.3.16}$$

3.4 Диференциране на съставна функция

В този параграф $x^0 \in \mathbb{R}^m$ и отвореното множество $U \subset \mathbb{R}^m$ е околност на точката x^0 (без ограничение на общността може да се счита, че тя е нейна δ-околност, т.е. U е отвореното кълбо $B(x^0; \delta)$ с център точката x^0 и радиус δ). Освен това е взета точка t_0, принадлежаща на даден отворен интервал в $\mathbb{R}$, т. е. $t_0 \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$.

Теорема 3.4.1 *Нека функцията f е дефинирана в можеството U, а φ_k – в интервала (α, β), т.е.*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad \varphi_k : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (k = 1 \div m),$$

като при това $x_k = \varphi_k(t)$ *за* $k = 1 \div m$, $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) \in U$ *за всички стойности на* $t \in (\alpha, \beta)$, *а точката* $(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_m(t_0)) = x^0$. *Нека* f *е диференцируема в* U, f'_{x_k} *са непрекъснати в т.* x^0 *за* $k = 1 \div m$, φ_k *са диференцируеми в* t_0 *и* $F : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *е дефинирана с равенството*

$$F(t) = f\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\right),\ t \in (\alpha, \beta).$$

Тогава функцията F *е диференцируема в точката* t_0 *и при това е в сила равенството*

$$F'(t_0) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(x^0)\varphi'_k(t_0). \tag{3.4.1}$$

Доказателство. За по-голяма яснота и достъпност на изложението е приведено доказателството в двумерния случай, като са използвани стандартните за случая означения x и y на променливите и φ, ψ, съответно вместо φ_1, φ_2. Нека освен това са въведени означенията

$$k = \varphi(t_0 + h) - x_0 = \varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0) \qquad (\Leftrightarrow\ x_0 + k = \varphi(t_0 + h)),$$

$$l = \psi(t_0 + h) - y_0 = \psi(t_0 + h) - \psi(t_0) \qquad (\Leftrightarrow\ y_0 + l = \psi(t_0 + h)),$$

и е разгледан изразът

$$\frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} = \frac{f(\varphi(t_0 + h), \psi(t_0 + h)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0))}{h}, \tag{3.4.2}$$

който се представя последователно, както следва

$$\frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} = \frac{f(x_0 + k, y_0 + l) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left[f(x_0 + k, y_0 + l) - f(x_0, y_0 + l) + f(x_0, y_0 + l) - f(x_0, y_0)\right] =$$
$$= \frac{f(x_0 + k, y_0 + l) - f(x_0, y_0 + l)}{h} + \frac{f(x_0, y_0 + l) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Сега по теоремата на Лагранж за крайните нараствания се получава съответно

$$f(x_0 + k, y_0 + l) - f(x_0, y_0 + l) = kf'_x\left(x_0 + \theta_1 k, y_0 + l\right),$$
$$f(x_0, y_0 + l) - f(x_0, y_0) = lf'_y(x_0, y_0 + \theta_2 l),$$

поради което (3.4.2) се преобразува в следната форма

$$\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h} f'_x(x_0+\theta_1 k, y_0+l)$$

$$+\frac{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}{h} f'_y(x_0, y_0+\theta_2 l)\cdot$$

От непрекъснатостта на φ и ψ, която следва от тяхната диференцируемост, веднага може да се заключи, че $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$ и $\lim\limits_{h\to 0} l = 0$, поради което граничен преход в последното равенство при $h \to 0$ води до равенството

$$F'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0), \tag{3.4.3}$$

което доказва верността на (3.4.1) за $m = 2$. В случая на произволно m доказателството се извършва аналогично. □

Пример 3.4.1 *Разгледана е функцията $f(x, y)$ – дефинирана и диференцируема в $U_{(1,2)} \subset \mathbb{R}^2$, която има непрекъснати частни производни f'_x, f'_y в точката $(1, 2)$. Намерена е производната $F'(0)$ на съставната функция F, зададена с равенството $F(t) = f(1 + 3t, 2 + 4t)$.*

Наистина, означавайки $x = \varphi(t) = 1 + 3t$, $y = \psi(t) = 2 + 4t$ и предвид факта, че $x_0 = \varphi(0) = 1$, $y_0 = \psi(0) = 2$, $\varphi'(t) = 3$ и $\psi'(t) = 4$, прилагането на (3.4.3) дава непосредствено резултата $\varphi'(0) = 3f'_x(1, 2) + 4f'_y(1, 2)$. □

Забележка 3.4.1 *Теорема 3.4.1 може да се приложи към значително по-общ случай, а именно, ако φ_k са функции на повече от една променлива, т.е. $t = (t_1, t_2, \ldots, t_s) \in U_{t^0} \subset \mathbb{R}^s$. При това положение, ако f е диференцируема в U_{x^0} с непрекъснати в точката x^0 частни производни f'_{x_k}, а φ_k са диференцируеми в t^0, то функцията F е диференцируема в точката t^0 и при това е в сила равенството*

$$\frac{\partial F(t^0)}{\partial t_n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k(t^0)}{\partial t_n},\ n = 1 \div s. \tag{3.4.4}$$

3.5 Производна по посока. Градиент

Да припомним, че за функции на една променлива първата производна в дадена точка има прост геометричен смисъл – тя е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията в тази точка. С други думи, тя изразява "стръмността" на графиката в тази точка (ако функцията расте, производната е положителна, и т.н.). За функции на m променливи първите частни производни са също m на брой, и интерпретацията им не е толкова очевидна. За да си изясним геометричния смисъл на първите производни, ще си послужим със следната аналогия: ще разгледаме графиката на дадена функция на две променливи като релеф на част от земната повърхност. Така, да си представим, че се намираме на склона на някакъв хълм. Тогава стръмността на пътеката, по която вървим, зависи от нейната посока: ние може да тръгнем право нагоре (голям положителен наклон), право надолу (голям отрицателен), или да поемем по хоризонталата – тогава пътеката е хоризонтална и наклонът е нулев. Тези съображения водят до понятието производна по посока, което е изложено по-долу.

Нека $x^0 \in \mathbb{R}^m$, $\nu \in \mathbb{R}^m$ и лъчът l е дефиниран, както следва

$$l : x = x^0 + t\nu,\ t > 0,$$

функцията f е дефинирана върху този лъч, а

$$\varphi(t) := f(x(t)) = f(x^0 + t\nu),\ t > 0.$$

Дефиниция 3.5.1 *Границата (ако съществува)*

$$\lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{f(x^0 + t\nu) - f(x^0)}{t},$$

се нарича производна на f в точката x^0 по посока на вектора ν и се означава с $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}$, т.е.

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{f(x^0 + t\nu) - f(x^0)}{t} \quad (\text{ако } \exists). \qquad (3.5.1)$$

Тук е мястото да се отбележи, че частните производни на дадена функция (ако съществуват) са всъщност производни "по посока на координатните оси".

Веднага може да се направи следната аналогия, свързана с понятието диференцируемост за съставните функции.

Забележка 3.5.1 *От Дефиниция 3.5.1 и теоремата за диференциране на съставна функция следва, че ако f е дефинирана и диференцируема в околността U_{x^0} на точката x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x_0, то съществува производната ѝ по посока на вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ и*

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{m} \nu_k \, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}. \tag{3.5.2}$$

За да се убедим в това, достатъчно е да съобразим, че $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}$ е дясната производна на функцията $\varphi(t) = f(x^0 + t\nu)$ за $t = 0$.

Дефиниция 3.5.2 *Векторът с координати $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \ldots, f'_{x_m}(x^0)$ се нарича градиент на f в точката x^0 и се означава*

$$\operatorname{grad} f(x^0) = \left(f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), \ldots, f'_{x_m}(x^0)\right). \tag{3.5.3}$$

Предвид тази дефиниция и по-конкретно (3.5.3), формулата (3.5.2) се записва по-кратко във вида

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \left(\operatorname{grad} f(x^0), \nu\right). \tag{3.5.4}$$

Казаното дотук в този параграф може да се перефразира по следния начин.

Теорема 3.5.1 *Ако функцията f е дефинирана и диференцируема в околност U_{x^0} на точката x^0 и f'_{x_k} са непрекъснати в x^0, то съществува производната на f по посока на произволен вектор $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ и тя се дава с формулата* (3.5.4).

Интерес представлява случаят, когато векторът ν е единичен, т.е. $\|\nu\| = 1$. Тогава е в сила неравенството $\left|\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial \nu}\right| \leqq \|\operatorname{grad} f(x^0)\|$, което следва непосредствено от (3.5.4) и от неравенството (1.1.3) на Коши–Шварц

$$\left|\frac{\partial f(x_0)}{\partial \nu}\right| = \left|(\operatorname{grad} f(x^0)), \nu\right| \leqq \|\operatorname{grad} f(x^0)\| \|\nu\| = \|\operatorname{grad} f(x^0)\|.$$

При това е добре известно, че равенство се достига само когато ν и $\mathrm{grad} f(x^0)$ са колинеарни, т.е. тогава

$$\left|\frac{\partial f(x_0)}{\partial \nu}\right| = \|\mathrm{grad}\, f(x^0)\|.$$

От друга страна, ако единичният вектор ν е колинеарен с градиента, то векторът $\nu = \dfrac{\mathrm{grad}\, f(x^0)}{||\mathrm{grad}\, f(x^0)||}$, и тогава

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = \left(\mathrm{grad}\, f(x^0), \frac{\mathrm{grad}\, f(x^0)}{||\mathrm{grad}\, f(x^0)||}\right) = ||\mathrm{grad}\, f(x^0)||.$$

Това означава, че ако $\mathrm{grad}\, f(x^0) \neq 0$, то производната по посока достига най-голяма стойност единствено, ако диференцирането се извършва по посока на градиента. С други думи, посоката на градиента е посоката на най-бързото нарастване на функцията, а големината му е равна на производната по тази посока.

По-нататък, ако $\nu = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_m)$, то производната (3.5.2) по посока ν става

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial \nu} = f'_{x_1}(x^0)\cos\alpha_1 + f'_{x_2}(x^0)\cos\alpha_2 + \ldots + f'_{x_m}(x^0)\cos\alpha_m.$$

3.6 Допирателна равнина. Нормална права

Нека точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ и $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$ е околност на (x_0, y_0). Нека освен това е дефинирана функция $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, като при това $z_0 = f(x_0, y_0)$. Да отбележим още, че графиката на така въведената функция представлява повърхнина в пространството $\mathbb{R}^3$, а уравнението $z = f(x, y)$ е уравнение на тази повърхнина.

И така, нека повърхнината S е зададена с уравнението, записано подолу

$$S : z = f(x, y) \qquad (\Leftrightarrow S : f(x, y) - z = 0), \tag{3.6.1}$$

нека съществуват първите частни производни f'_x, f'_y за всички $(x, y) \in U$ и f'_x, f'_y са непрекъснати в точката (x_0, y_0). По-нататък са дадени няколко дефеници, свързани с повърхнината S.

Дефиниция 3.6.1 *Равнината τ ($\tau \nparallel Oz$), зададена с уравнение*

$$\tau : z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{3.6.2}$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина в точката M_0 към повърхнината S, дадена в (3.6.1) и представляваща графика на функцията $f(x, y)$.

Дефиниция 3.6.2 *Векторите $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$*

$$\boldsymbol{n}_1\left(-f'_x(x_0,y_0), -f'_y(x_0,y_0), 1\right), \quad \boldsymbol{n}_2\left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1\right), \tag{3.6.3}$$

които очевидно са нормални вектори на тангенциалната равнина (3.6.2), се наричат нормални вектори и за повърхнината S.

Както се вижда, $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ са противоположни вектори, т. е. $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$. Това позволява те да се използват за определяне ориентацията на повърхнината S. Така например, горната страна на повърхнината се дефинира с вектора $\boldsymbol{n}_1$, за който ъгълът $\measuredangle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{k})$ е остър.

Дефиниция 3.6.3 *Правата n, зададена с уравнение*

$$n: \ \frac{x-x_0}{-f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{-f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{1}, \tag{3.6.4}$$

се нарича нормала към повърхнината S в точката M_0.

За да си изясним по-добре въпроса, как са получени координатите на нормалните вектори $\boldsymbol{n}_{1,2}$ в (3.6.3), а оттам и уравненията (3.6.2) и (3.6.4), разглеждаме по-подробно повърхнината (3.6.1). Ясно е, че ако прекараме през точката M_0 две равнини, съответно равнината $\alpha: \ x = x_0$ и $\beta: \ y = y_0$, всяка от тях пресича повърхнината S в равнинна крива линия, означена съответно с C_1 и C_2, т. е. крива линия с уравнение

$$C_1: \ x = x_0, \ y = y, \ z = f(x_0, y), \qquad C_2: \ x = x, \ y = y_0, \ z = f(x, y_0).$$

Ако с $\boldsymbol{t}_1$ е означен направляващият вектор на допирателната права на кривата C_1 в точката M_0, а с $\boldsymbol{t}_2$ – направляващият вектор на допирателната права на кривата C_2 в същата точка, то

$$\boldsymbol{t}_1\left(0, \ 1, \ f'_y(x_0,y_0)\right), \qquad \boldsymbol{t}_2\left(1, \ 0, \ f'_x(x_0,y_0)\right). \tag{3.6.5}$$

Тъй като допирателната равнина τ е компланарна с векторите (3.6.5), то нейният нормален вектор може да се получи от векторното им произведение. По-точно, в сила са равенствата

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{t}_2 \times \boldsymbol{t}_1, \qquad \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{t}_2. \tag{3.6.6}$$

По-нататък уравненията (3.6.2) и (3.6.4) се получават автоматично.

3.7 Неявни функции. Съществуване и диференциране

Започваме този параграф с решаване на уравнения от вида $F(x;y)=0$ спрямо една от променливите, например y. Очевидно е, че решението трябва да зависи от другата променлива. Да запишем това решение във вида $y=f(x)$. За да проверим дали така дефинираното y е решение на търсеното уравнение, трябва да го заместим в уравнението, откъдето стигаме до равенството

$$F(x;f(x))\equiv 0. \tag{3.7.1}$$

Дефиниция 3.7.1 *Ако функцията $f(x)$ удовлетворява горното равенство тъждествено за всяко x от дефиниционното си множество, тя се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението $F(x;y)=0$.*

По-долу се дискутира въпросът за съществуване и единственост на неявната функция. Преди всичко да отбележим, че съвсем не всяко уравнение задава неявна функция. Така например за $x^2+y^2+1=0$ не съществува x, за което да е дефинирано y, а в по-простия случай $x^2+y^2=0$ единствено решение съществува само за $x=0$ и то е $y=0$ (за $x\neq 0$ не съществува решение относно y). Прави впечатление, че в общия случай е възможно множеството от стойности на x да е различно от празното множество, но да е твърде "бедно" – например в последния случай. За методите на анализа обаче е необходимо да сме сигурни, че функцията е дефинирана в отворено множество, тъй като интерес представляват неявните функции с хубави свойства, в частност диференцируеми. Ако $f(x)$ е такава функция, то, диференцирайки равенството (3.7.1) по x и използвайки теоремата за диференциране на съставни функции, получаваме

$$F'_x(x;f(x))+f'(x)F'_y(x;f(x))\equiv 0,$$

откъдето

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x;f(x))}{F'_y(x;f(x))}.$$

Оттук се вижда, че е естествено на функцията F да бъде наложено условието $F'_y(x,y)\neq 0$. Ще разгледаме още един прост пример. Да вземем уравнението $F(x;y)=x^2+y^2-R^2=0$, определящо окръжност с център в началото и радиус R в равнината $\mathbb{R}^2$. Ясно е, че за да има уравнението решение, трябва $x \in [-R; R]$. От друга страна, в крайните точки на интервала $x = \pm R$ се нарушава условието $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Лесно се вижда, че в тези точки окръжността не може да бъде представена като графика на диференцируема функция (тангентата ѝ става вертикална). За всяко x от отворения интервал $(-R; R)$ това уравнение има точно две решения относно y, т.е. $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Ако се интересуваме само от непрекъснати функции, получаваме само двете неявни функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, т.е. в този случай няма еднозначност. За да се избегне нееднозначността, нещата трябва да се разглеждат локално – да се фиксира едно решение в дадена точка (тя може да лежи върху горната или долната полуокръжност), и да се разгледа непрекъснатата функция, вземаща съответната стойност в тази точка. Тогава, в зависимост от избраното решение в началната точка, се получава уравнението на горната или долната полуокръжност.

Нека $M_0(x_0, y_0)$ е точка в $\mathbb{R}^2$, отвореното множество $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност и нека F е функция, дефинирана в U, т.е. $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Както е изяснено по-горе, търси се съответствие $x \mapsto y$, което се определя с помощта на уравнението

$$F(x, y) = 0, \tag{3.7.2}$$

където F е дадената функция. С други думи, търси се множеството на всички x, за които съществува единствено y, удовлетворяващо равенството (3.7.2). Сега вече сме подготвени да дадем точната формулировка на теоремата, т.е. стигаме до следния локален резултат.

Теорема 3.7.1 (за съществуване на неявна функция) *Нека функцията $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия*

1) F е непрекъсната в U,

2) $F(x_0, y_0) = 0$,

3) За всяка точка $(x, y) \in U$ съществува $F'_y(x, y)$,

4) F'_y е непрекъсната в M_0,

5) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогава съществуват околности

$$X = \{x : |x - x_0| < a\}\,(a > 0) \quad \text{и} \quad Y = \{y : |y - y_0| < b\}\,(b > 0), \tag{3.7.3}$$

такива, че правоъгълникът $\Pi = X \times Y \subset U$ и освен това съществува единствена функция $y = f(x)$, $f : X \to Y$, f – непрекъсната в множеството X, $f(x_0) = y_0$ и за всяко $x \in X$ е изпълнено $F(x, f(x)) = 0$.

Преди да преминем към доказателството на теоремата, да отбележим, че с цел улесняване на изложението, е направена една забележка отнасяща се до равенството $y_0 = f(x_0)$ (в случай, че е налице единственост на функцията $y = f(x)$), и освен това е въведена още една дефиниция, свързана с понятието неявна функция.

Забележка 3.7.1 *Тъй като за всяко x, принадлежащо на X, съществува единствено решение $y = f(x)$ на уравнението $F(x, y) = 0$, принадлежащо на Y, и доколкото $F(x_0, y_0) = 0$, а $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, то наистина $y_0 = f(x_0)$.*

Дефиниция 3.7.2 *Функцията $y = f(x)$ се нарича неявна функция, дефинирана от уравнението $F(x, y) = 0$ в околност на точката (x_0, y_0).*

Доказателство (на теоремата за неявната функция). Тъй като F е непрекъсната в U и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, за определеност можем да предположим, че $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Тогава поради непрекъснатостта на F'_y в (x_0, y_0), неравенството е вярно и в някаква околност в $\mathbb{R}^2$ на точката (x_0, y_0) (виж Кудрявцев, том 1, §19.2, Лема 1). Да изберем правоъгълната околност

$$P_{\alpha,\beta} = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta) \subset U \quad (\alpha, \beta > 0)$$

така, че $F'_y(x, y) > 0$ в затворената обвивка $[P_{\alpha,\beta}]$ на правоъгълника $P_{\alpha,\beta}$, и да разгледаме по-нататък $\varphi(y) = F(x_0, y)$ като функция на y. От горното следва, че тя е строго монотонно растяща в интервала $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$, и тъй като $\varphi(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$, то

$$\varphi(y_0 - \beta) = F(x_0, y_0 - \beta) < 0 \quad \text{и} \quad \varphi(y_0 + \beta) = F(x_0, y_0 + \beta) > 0.$$

Поради непрекъснатостта на F в точките $(x_0, y_0 - \beta)$ и $(x_0, y_0 + \beta)$ следва, че функциите

$$F(x, y_0 - \beta) \quad \text{и} \quad F(x, y_0 + \beta)$$

като функции на x са също непрекъснати в точката x_0 и следователно, съществува такава δ-околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (предполага се $\delta \leq \alpha$), че

$$F(x, y_0 - \beta) < 0 \quad \text{и} \quad F(x, y_0 + \beta) > 0$$

за всички $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Нека сега да фиксираме $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ и да разгледаме функцията F като функция на променливата $y \in [y_0-\beta, y_0+\beta]$. В този интервал съществува производната $F'_y(x,y) > 0$, следователно F като функция на y е непрекъсната и строго монотонно растяща в интервала $[y_0-\beta, y_0+\beta]$, при това

$$F(x, y_0-\beta) < 0 \quad \text{и} \quad F(x, y_0+\beta) > 0.$$

Следователно, за всяко фиксирано $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ съществува такова $y* \in (y_0-\beta, y_0+\beta)$, че $F(x, y*) = 0$ (и поради строгата монотонност на F в интервала $[y_0-\beta, y_0+\beta]$, това $y*$ е единствено). С други думи, по този начин получихме еднозначно съответствие (т.е. функция) $y* = f(x)$ за такова $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, че $y* \in (y_0-\beta, y_0+\beta)$ и $F(x, y*) = 0$. Едновременно с това е получена и единствеността на тази функция, поради което (съгласно Забележка 3.7.1), условието $F(x_0, y_0) = 0$ води до равенството $y_0 = f(x_0)$.

Остава да се докаже непрекъснатостта на функцията f в интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, започвайки с непрекъснатостта на $y = f(x)$ в точката x_0. За целта, нека $\varepsilon > 0$. Нека в дадената по-горе конструкция да подчиним изискването $\beta > 0$ на допълнителното условие $\beta \leq \varepsilon$. Тогава по вече доказаното, от $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, (т.е. $|x-x_0| < \delta$) следва, че $y = f(x) \in (y_0-\beta, y_0+\beta) \subset (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ и затова $|y-y_0| < \varepsilon$, което показва непрекъснатостта на функцията f в точката x_0. За да докажем непрекъснатостта на функцията $y = f(x)$ в произволна точка $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, да отбележим, че съгласно доказаното по-горе са изпълнени следните условия:

1) F е непрекъсната в правоъгълника $[P_{\alpha,\beta}]$,

2) $F(x, f(x)) = 0$ и $(x, f(x)) \in P_{\alpha,\beta}$ за всички $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$,

3) $F'_y(x,y) > 0$ за всички $(x,y) \in P_{\alpha,\beta}$.

От приведените по-горе разсъждения се вижда, че тези три свойства позволяват доказателство за точката $(x, f(x))$ да се проведе аналогично на това за точката (x_0, y_0), откъдето следва непрекъснатостта на f за всяка точка $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

В заключение, да отбележим, че доказателството приключва, вземайки $a = \delta$ и $b = \beta$ във формулата (3.7.3). $\square$

Теорема 3.7.2 (добавка към Теорема 3.7.1) *Ако освен това F'_x и F'_y са дефинирани в U и непрекъснати в (x_0, y_0), то $f(x)$ е диференцируема в* *точка* x_0 *и* $f'(x_0)$ *се изразява с формулата:*

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{3.7.4}$$

Доказателство. Нека в околността $P_{\alpha,\beta}$ съществуват непрекъснатите в точката (x_0, y_0) частни производни F'_x и F'_y. Тогава функцията $F(x, y)$ е диференцируема в точката (x_0, y_0), т.е.

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = \tag{3.7.5}$$
$$= F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

където

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Да вземем във формулата (3.7.5)

$$x_0 + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - y_0.$$

Тогава поради условието $F(x, f(x)) = 0$ получаваме

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) = 0,$$

и тъй като и $F(x_0, y_0) = 0$, то от (3.7.5) следва

$$F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = 0.$$

От последното равенство се получава, че

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1}{F'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2}. \tag{3.7.6}$$

Нека сега $\Delta x \to 0$. Тогава поради непрекъснатостта на f и $\Delta y \to 0$, а това означава, че $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, откъдето следва, че във формулата (3.7.6) е в сила

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2 = 0.$$

Затова при $\Delta x \to 0$ границата на дясната страна на (3.7.6) съществува и е равна на $-\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$ (да напомним, че $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$), поради което съществува и границата на лявата страна, т.е съществува производната

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{3.7.7}$$

Теоремата е доказана. □

Забележка 3.7.2 *Ако F'_x и F'_y са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то функцията f' е непрекъсната в интервала X. Наистина, прилагайки формулата (3.7.7) за произволна точка $x \in X$, получаваме*

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \tag{3.7.8}$$

откъдето по теоремата за суперпозиция от непрекъснати функции се получава непрекъснатостта на $f'(x)$ в интервала X.

Аналогично се формулира и доказва теоремата за неявната функция, дефинирана от уравнението $F(x, y) = 0$, за $x(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ $(m > 2)$ и $y \in \mathbb{R}$, т.е. от уравнението $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 0$. И така, нека точката $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$, $M_0(x^0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и нека $U = U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ е околност на M_0. Валидна е следната теорема.

Теорема 3.7.3 (за съществуване на неявна функция) *Нека функцията $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия:*

1) *F е непрекъсната в U,*

2) *$F(x^0, y_0) = 0$,*

3) *За всяка точка $(x, y) \in U$ съществува $F'_y(x, y)$,*

4) *F'_y е непрекъсната в M_0,*

5) *$F'_y(x^0, y_0) \neq 0$.*

Тогава съществуват околности

$$X_k = \left\{x : \left|x - x_k^0\right| < a_k\right\},\ a_k > 0,\ k = 1 \div m;\ Y = \{y : |y - y_0| < b\},\ b > 0,$$

такива че паралелепипедът $\Pi = X \times Y \subset U$, $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$, и освен това съществува единствена функция $y = f(x)$, $f : X \to Y$, f – непрекъсната в X; $f(x^0) = y_0$ и за всяко $x \in X$ е изпълнено $F(x, f(x)) = 0$. Ако освен това $F'_{x_k}, k = 1 \div m$ и F'_y са дефинирани в U и непрекъснати в (x^0, y_0), то $f(x)$ е диференцируема в точка x^0 и $f'(x_k^0)$ се изразява с формулата:

$$f'_{x_k}(x^0) = -\frac{F'_{x_k}(x^0, f(x^0))}{F'_y(x^0, f(x^0))} = -\frac{F'_{x_k}(x^0, y_0)}{F'_y(x^0, y_0)}. \tag{3.7.9}$$

Забележка 3.7.3 *Ако F'_{x_k} и F'_y са непрекъснати в $U = U_{M_0}$, то функцията f'_{x_k} е непрекъсната в паралелепипеда X. Наистина, прилагайки формулата (3.7.9) за произволна точка $x \in X$, получаваме*

$$y'_{x_k} = f'_{x_k}(x) = -\,\frac{F'_{x_k}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\,\frac{F'_{x_k}(x, y)}{F'_y(x, y)}, \tag{3.7.10}$$

откъдето по теоремата за суперпозиция от непрекъснати функции се получава непрекъснатостта на $f'_{x_k}(x)$ в паралелепипеда X.

Сега можем да отидем по-далече. Ако функцията F има непрекъснати частни производни от втори ред, то изразите от дясната страна на (3.7.8) (респективно (3.7.10)) могат да се диференцират още веднъж по променливата x (респективно по x_j, $j = 1 \div m$), при което се получават вторите (частни) производни на f. Така се получават формулите

$$f''(x) = -\,\frac{F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}\,y' + F''_{yy}\,(x, y)\,y'^{\,2}}{F'_y(x, y)}, \tag{3.7.11}$$

респективно, изпускайки за удобство променливите,

$$f''_{x_k x_k}(x) = f''_{x_k^2}(x) = -\,\frac{F''_{x_k^2} + 2\,F''_{x_k\,y}\,y'_{x_k} + F''_{yy}\,y'^{\,2}_{x_k}}{F'_y}, \tag{3.7.12}$$

и най-сетне, за $k \neq j$

$$f''_{x_k x_j}(x) = -\,\frac{F''_{x_k x_j} + F''_{x_k\,y}\,y'_{x_j} + F''_{x_j\,y}\,y'_{x_k} + F''_{yy}\,y'_{x_k}y'_{x_j}}{F'_y}, \tag{3.7.13}$$

като първите производни (респ. частни производни) на неявната функция могат да се заместят с изразите от (3.7.8) и (3.7.10).

Да отбележим още, че формулите (3.7.11)–(3.7.13) могат да се получат по-бързо, като се диференцира (3.7.2) два пъти по съответната променлива, отчитайки, че y е функция на x (както е пресметнато y' в началото на този параграф).

Глава 4

Екстремуми на функция на няколко променливи

4.1 Формула на Тейлор за функция на няколко променливи

Преследвайки аналогия с функция на една реална променлива, да припомним, че ако f е дефинирана и непрекъсната в околност $U = U_{x_0}$ на точката x_0, заедно с производните си до $(n+1)$-ви ред ($n \in \mathbb{N}_0$), то за нея е в сила формулата на Тейлор

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \; + \; r_n(x), \tag{4.1.1}$$

с остатъчен член

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1), \tag{4.1.2}$$

записан тук във формата на Лагранж.

По подобие на едномерния случай, ако една функция на много променливи, има достатъчен брой непрекъснати частни производни в околност на някоя точка, то във въпросната околност тази функция може да се представи като сума на полином и остатък, който е "малък" в известен смисъл.

За улесняване на изложението, ще започнем със случая на функция на две променливи. За целта, да вземем точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и нека $U =$

$U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$ е нейна околност, звездообразна относно точката (x_0, y_0) (т.е наред с всяка точка $(x, y) \in U$ околността U съдържа и отсечката, която я свързва с (x_0, y_0), виж Дефиниция 1.4.15). Без ограничение на общността можем да считаме, че U е δ-околност на (x_0, y_0), т. е. отворен кръг с център точката (x_0, y_0) и радиус δ. Нека освен това функцията f е дефинирана в множеството U. В сила е следната теорема.

Теорема 4.1.1 *Нека функцията $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ е дефинирана и непрекъсната в δ-околността U на точката (x_0, y_0), заедно с частните си производни си до $n+1$-ви ред ($n \in \mathbb{N}_0$), и $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$. Тогава съществува такова $\vartheta = \vartheta(\Delta x, \Delta y)$, $0 < \vartheta < 1$, че е в сила формулата*

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x_0, y_0) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y),$$

или по-кратко

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y), \qquad (4.1.3)$$

където

$$r_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \vartheta\Delta x, y_0 + \vartheta\Delta y), \qquad (4.1.4)$$

$$0 < \vartheta < 1.$$

Дефиниция 4.1.1 *Формулата* (4.1.3) *се нарича формула на Тейлор от ред n за функцията f, функцията r_n – остатъчен член, а записът му във вида* (4.1.4) *се нарича остатъчен член на формулата на Тейлор във формата на Лагранж.*

Забележка 4.1.1 *Да отбележим, че при* $n = 0$ *формулата* (4.1.3) *изисква разяснение на смисъла на първото събираемо от дясната страна, защото в този случай индексът, написан над знака за сумиране, е равен на нула. В този случай по дефиниция този член е равен на нула, т.е. формулата* (4.1.3) *има вида*

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \Delta y).$$

По-нататък, когато се среща символът за сумиране $\sum$, *в който стойността на индекса на сумиране, написан под сумата, е по-голям от този, написан над сумата, също ще считаме, че сумата е нула.*

Доказателство. И така, нека U е δ-околност на (x_0, y_0), т. е. отворен кръг с център точката (x_0, y_0) и радиус δ, и нека Δx и Δy са фиксирани така, че $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$. Тогава точките $(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$ с $0 \le t \le 1$ лежат на отсечката, съединяваща точките (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, поради което те също принадлежат на δ-околността U. Поради това има смисъл суперпозицията на функциите

$$z = f(x, y)$$

и

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y \qquad (0 \le t \le 1),$$

т.е. съставната функция

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad 0 \le t \le 1. \tag{4.1.5}$$

Очевидно е, че

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0). \tag{4.1.6}$$

Тъй като функцията f има непрекъснати частни производни до $(n+1)$-ви ред в множеството U, то съставната функция F има непрекъснати производни до $(n+1)$-ви ред в интервала [0,1]. Поради това там е в сила формулата на Тейлор от n-ти ред за функцията F с остатъчен член, записан във формата на Лагранж:

$$F(t) - F(0) = F'(0)\,t + \frac{F''(0)}{2!}\,t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}\,t^n + \frac{F^{(n+1)}(\vartheta t)}{(n+1)!}\,t^{n+1}, \tag{4.1.7}$$

$$0 \le t \le 1,$$

и функцията (4.1.5) може да се диференцира $n+1$ пъти като съставна функция, без да се държи сметка за реда на диференцирането, тъй като в този случай получените частни производни не зависят от него.

Изразявайки от (4.1.5) производните на F и поставяйки $t = 1$ в (4.1.7), получаваме исканата формула на Тейлор. Наистина

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial y}\Delta y,$$

откъдето (изпускайки за краткост аргумента)

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2,$$

след което по индукция се получава лесно, че

$$F^{(k)}(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad k = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{4.1.8}$$

Сега от (4.1.8) получаваме последователно:

$$F^{(k)}(0) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0, y_0), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1.9}$$

$$F^{(n+1)}(\vartheta t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \vartheta t\Delta x, y_0 + \vartheta t\Delta y). \tag{4.1.10}$$

Замествайки сега (4.1.9) и (4.1.10) в (4.1.7), и вземайки $t = 1$, получаваме

$$\Delta z = F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \vartheta\Delta x, y_0 + \vartheta\Delta y),$$

за $0 < \vartheta < 1$, което доказва теоремата. $\square$

Използвайки понятието диференциал от по-висок ред

$$d^k f(x_0, y_0) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0, y_0), \quad k = 1, 2, \ldots, n+1,$$

формулата на Тейлор (4.1.3) може да се запише във вида

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k f(x_0, y_0) + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \vartheta \Delta x, y_0 + \vartheta \Delta y)}{(n+1)!},\ 0 < \vartheta < 1, \quad (4.1.11)$$

който е възможно най-прост и удобен за запомняне.

Преминавайки към разглеждане на общия многомерен случай, да вземем точката $x^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Нека множеството $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ е нейна околност, звездообразна относно точката x^0, която без ограничение можем да считаме, че е δ-околност на x^0, т. е. U е отвореното кълбо $B(x^0; \delta)$, и нека функцията f е дефинирана в U.

Теорема 4.1.2 *Нека функцията $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ е дефинирана и непрекъсната в δ-околността U на точката x^0, заедно с частните си производни до $n+1$-ви ред ($n \in \mathbb{N}_0$), и $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2} < \delta$. Тогава съществува такова $\vartheta = \vartheta(\Delta x) = \vartheta(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$, $0 < \vartheta < 1$, че е в сила формулата*

$$\Delta z = f(x) - f(x^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = \quad (4.1.12)$$

$$= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(x_1^0, \ldots, x_m^0) + r_n(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m),$$

където

$$r_n(\Delta x) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1} f(x^0 + \vartheta \Delta x), \quad (4.1.13)$$

$$(x^0 + \vartheta \Delta x) = (x_1^0 + \vartheta \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \vartheta \Delta x_m), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

С помощта на диференциали формулата (4.1.12) *се записва във вида*

$$\Delta z = f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + r_n(\Delta x). \quad (4.1.14)$$

Най-сетне, да отбележим, че формулата на Тейлор, записана в последната форма, изглежда съвсем сходно на съответната формула (4.1.1) за функция на една променлива.

Пример 4.1.1 *За илюстрация е написана формулата на Тейлор за функцията* $f(x,y) = e^{x+y}$ *в точката* $(x_0, y_0) = (0,0)$ *и* $n = 1$.

За исканата формула се нуждаем от първите и вторите частни производни, за които чрез непосредствено диференциране получаваме:

$$f'_x = e^{x+y},\ f'_y = e^{x+y}, \quad f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy} = e^{x+y}.$$

За $n = 1$ функцията f и първите ѝ частни производни участват във формулата на Тейлор със стойностите си

$$f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 1$$

в точката $(0,0)$, а вторите частни производни – в $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ със $\xi_1 = \vartheta x$, $\xi_2 = \vartheta y$ и $\vartheta \in (0,1)$, т.е.

$$f''_{xx}(\xi_1,\xi_2) = f''_{xy}(\xi_1,\xi_2) = f''_{yx}(\xi_1,\xi_2) = f''_{yy}(\xi_1,\xi_2) = e^{\xi_1+\xi_2} = e^{\vartheta(x+y)},$$

откъдето следва, че

$$f(x,y) = 1 + 1.x + 1.y + \frac{1}{2!}\left(e^{\vartheta(x+y)}x^2 + 2e^{\vartheta(x+y)}xy + e^{\vartheta(x+y)}y^2\right) =$$

$$= 1 + (x+y) + \frac{e^{\vartheta(x+y)}}{2!}\,(x+y)^2\,,$$

което е търсената формула. □

4.2 Локални екстремуми на функция на няколко променливи

Изучаваният в този параграф материал носи аналитичен характер и доказателствата не се усложняват с увеличаване броя на променливите. Затова разглежданията могат да започнат направо с общия m-мерен случай, като в случай на необходимост да се покажат специфичните особености за $m = 2$ и $m = 3$.

И така, да разгледаме множеството $D \subset \mathbb{R}^m$ и функията $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, която е дефинирана в него.

Дефиниция 4.2.1 *Казва се, че функцията $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ има локален максимум в точката $x^0 \in D$, ако съществува такава околност $U_{x^0} \subset D$ на точката x^0, че*

$$f(x^0) \geqq f(x) \quad \text{за всяко } x \in U_{x^0}. \tag{4.2.1}$$

Дефиниция 4.2.2 *Казва се, че функцията $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ има локален минимум в точката $x^0 \in D$, ако съществува такава околност $U_{x^0} \subset D$ на точката x^0, че*

$$f(x^0) \leqq f(x) \quad \text{за всяко } x \in U_{x^0}. \tag{4.2.2}$$

Дефиниция 4.2.3 *Локалните максимуми и локалните минимуми се наричат по-общо локални екстремуми.*

Дефиниция 4.2.4 *Ако неравенството в* (4.2.1) *или* (4.2.2) *е строго при $x \neq x^0$, то съответният локален екстремум се нарича строг локален екстемум (т.е. строг локален максимум или строг локален минимум).*

Използвайки познанията за локални екстремуми на функция на една променлива, може да се формулира следният резултат, даващ необходимо условие за съществуване на локален екстремум на функция на много променливи.

Теорема 4.2.1 (необходимо условие) *Нека функцията $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ притежава локален екстремум за $x^0 \in D \subset \mathbb{R}^m$ и освен това съществуват първите частни производни $f'_{x_k}(x^0)$ в точката x^0 за $k = 1 \div m$. Тогава всички тези частни производни са равни на нула, т.е.*

$$f'_{x_k}(x^0) = 0, \quad \text{за } k = 1 \div m. \tag{4.2.3}$$

Доказателство. С цел да сведем случая до функция на една променлива, означаваме с $g(x_k)$ функцията

$$g(x_k) := f(x_1^0, x_2^0, \dots x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) \qquad (k = 1 \div m), \tag{4.2.4}$$

дефинирана в околност на x_k^0. Очевидно е, че тя е диференцируема в точката x_k^0 и има локален екстремум в нея, поради което $g'(x_k^0) = 0$. Тъй като $g'(x_k^0) = f'_{x_k}(x^0) = 0$, то заключаваме, че всички първи частни производни на f имат стойност 0 в точката x^0, т.е. $f'_{x_k}(x^0) = 0$ за $k = 1 \div m$. □

Дефиниция 4.2.5 *Точката x^0 се нарича стационарна точка за функцията f, диференцируема в нея, ако $grad\, f(x^0) = \boldsymbol{0}$.*

Забележка 4.2.1 *Очевидно е тогава, че точката x^0, в която функцията f е диференцируема, е стационарна точка за нея тогава и само тогава, когато*

$$f'_{x_k}(x^0) = 0 \text{ за } k = 1 \div m.$$

Да отбележим още, че предвид Теорема 4.2.1, една диференцируема функция може да има евентуален локален екстремум само в нейна стационарна точка.

Забележка 4.2.2 *Условието* (4.2.3) *не е достатъчно за съществуване на локален екстремум.*

И така, има функции, които са диференцируеми във всяка точка от дефиниционното си множество, но частните им производни са навсякъде различни от нула (т.е. нямат стационарни точки), и поради това нямат локални екстремуми, и такива, които имат стационарни точки, но нямат локални екстремуми в тях. Това се илюстрира например със следния пример.

Пример 4.2.1 *Тук са разгледаните две функции, които са дефинирани и диференцируеми в цялата равнина $\mathbb{R}^2$, но нямат локални екстремуми в нито една точка от нея, а именно*

а) $f(x, y) = e^{x+y}$,

б) $f(x, y) = xy$.

Наистина частните производни на първата от двете функции са

$$f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = e^{x+y} \neq 0$$

за всички (x, y) от равнината $\mathbb{R}^2$, и затова f няма стационарни точки, а оттам и локални екстремуми.

Частните производни на втората функция са съответно $f'_x(x,y) = y$ и $f'_y(x,y) = x$, откъдето $grad\ f(x,y) = (y,x) = (0,0)$ само в точката $(0,0)$. Тогава тази точка е единствената стационарна точка за f, и само в нея е възможно функцията да има локален екстремум. Обаче разликата $f(x,y) - f(0,0) = xy - 0 = xy$ сменя знака си във всяка произволно взета околност на точката $(0,0)$ (в точките на първи и трети квадрант знакът на тази разлика е положителен, докато във втори и четвърти – отрицателен), поради което стойността $f(0,0)$ не е нито най-малка в околността, нито най-голяма. Следователно и тази функция няма локални екстремуми. Точката $(0,0)$ е *седловинна* за хиперболичната повърхнина $z = xy$. $\square$

4.3 Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум на функция

За да се гарантира наличието на локален екстремум на дадена функция в някаква стационарна точка, е нужно да се поставят допълнителни ограничения върху функцията, т.е достатъчни условия за съществуване на локален екстремум. Започвайки с функция на две независими променливи, нека точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, множеството $U = U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2$ е околност на тази точка и функцията f е дефинирана в околността U. Вярна е следната теорема.

Теорема 4.3.1 (Достатъчно условие) *Нека функцията $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ притежава непрекъснати частни производни $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ от втори ред в околността U и точката (x_0, y_0) е стационарна за f, т.е.*

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0. \tag{4.3.1}$$

Тогава

1) *Ако*
$$\Delta = f''_{xx}(x_0,y_0).f''_{yy}(x_0,y_0) - \left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 > 0, \tag{4.3.2}$$
то $f(x,y)$ има локален екстремум в точката (x_0,y_0). Този екстремум е строг локален минимум, ако $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$, или строг локален максимум, ако $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$;

2) *Ако*
$$\Delta = f''_{xx}(x_0,y_0).f''_{yy}(x_0,y_0) - \left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 < 0, \tag{4.3.3}$$

то $f(x,y)$ няма локален екстремум в (x_0,y_0);

3) Ако

$$\Delta = f''_{xx}(x_0,y_0).f''_{yy}(x_0,y_0) - \left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 = 0, \tag{4.3.4}$$

то може да се случи както $f(x,y)$ да има локален екстремум в точката (x_0,y_0), така и да няма такъв.

Доказателство. Прилагайки формулата на Тейлор за функцията (4.1.3) с $n=1$ и остатъчен член (4.1.4), получаваме следния израз за нарастването на функцията

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \tag{4.3.5}$$

$$+\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(\xi,\eta)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(\xi,\eta)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(\xi,\eta)(y-y_0)^2\right),$$

където $\xi = x_0 + \vartheta(x-x_0)$, $\eta = y_0 + \vartheta(y-y_0)$ и $0 < \vartheta < 1$. Нека освен това $f''_{xx}(x_0,y_0) \neq 0$ (ако $f''_{xx}(x_0,y_0) = 0$, изследванията за локален екстремум се провеждат според знака на $f''_{yy}(x_0,y_0)$). Тъй като (x_0,y_0) е стационарна точка за f, то (4.3.5) се редуцира до равенството

$$\Delta f = \frac{(y-y_0)^2}{2}\left(f''_{xx}(\xi,\eta)\frac{(x-x_0)^2}{(y-y_0)^2} + 2f''_{xy}(\xi,\eta)\frac{(x-x_0)}{(y-y_0)} + f''_{yy}(\xi,\eta)\right), \tag{4.3.6}$$

чиято дясна страна представлява квадратна функция на $(x-x_0)/(y-y_0)$. За съществуването на локален екстремум се изисква $\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ да запазва знака си в някаква околност на (x_0,y_0), което е възможно само, ако дискриминантата на горния израз е отрицателна, т. е.

$$D = \left[f''_{xy}(\xi,\eta)\right]^2 - f''_{xx}(\xi,\eta).f''_{yy}(\xi,\eta) < 0. \tag{4.3.7}$$

Нека сега е изпълнено условието (4.3.2). Това води до съответното неравенство за дискриминантата в точката (x_0,y_0)

$$D = \left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 - f''_{xx}(x_0,y_0).f''_{yy}(x_0,y_0) < 0,$$

а отттам (поради непрекъснатостта на вторите частни производни) до съществуването на околност на (x_0,y_0), в която е изпълнено неравенството

(4.3.7). Следователно нарастването Δf от (4.3.6) (което представлява квадратна функция на $(x-x_0)/(y-y_0)$) запазва знака си в цяла околност на (x_0,y_0). По-нататък да отбележим, че този знак зависи от коефициента f''_{xx} пред втората степен на $(x-x_0)/(y-y_0)$. Освен това, отново поради непрекъснатостта, ако $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$, то в цяла околност се запазва същото неравенство, т. е. $f''_{xx}(\xi,\eta)>0$, което означава, че квадратната функция в (4.3.6) е положителна в цяла околност на (x_0,y_0), и следователно f има строг локален минимум в тази точка. Аналогично се получава и резултатът за $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$, когато следва, че f има строг локален максимум.

По същия начин може да се докаже, че неравенството (4.3.3) гарантира отсъствието на локален екстремум в точката (x_0,y_0).

За пълнота да отбележим, че ако е налице условието (4.3.4), са нужни допълнителни изследвания за доказване наличието на локален екстремум или неговото отсъствие. $\square$

За по-бързо и лесно изясняване на ситуацията, в която е налице някое от условията (4.3.2) – (4.3.4), са разгледани два примера. Първият от тях е във връзка с (4.3.2) и (4.3.3).

Пример 4.3.1 *Тук са разгледаните три функции, които са дефинирани и диференцируеми в цялата равнина* $\mathbb{R}^2$, *и изпълняват условията* $\Delta>0$, *респективно* $\Delta<0$, *в стационарните си точки, а именно:*

а) $f(x,y)=x^2+y^2$,

б) $f(x,y)=-x^2-y^2$,

в) $f(x,y)=x^2-y^2$.

Както е лесно да се види, трите функции имат една и съща стационарна точка, и това е точката $(x_0,y_0)=(0,0)$. За първите две от тях $\Delta=4>0$, което означава, че тези функции имат строг локален екстремум в тази точка. Обаче в подточка а) е в сила неравенството $f''_{xx}(0,0)=2>0$, и затова f има локален минимум в тази точка и този минимум е $f_{\min}(x,y)=f(0,0)=0$, а в подточка б) – неравенството $f''_{xx}(0,0)=-2<0$, и затова f има локален максимум със стойност $f_{\max}(x,y)=f(0,0)=0$. За третата функция $\Delta=-4<0$, поради което функцията в подточка в) няма локалнен екстремум в тази точка. $\square$

Вторият пример се отнася за функции, които изпълняват условието (4.3.4). Някои от тях имат локален екстремум, други – не. Някои от екстремумите са строги, други – не.

Пример 4.3.2 *Тук са разгледани няколко функции, дефинирани и диференцируеми в цялата равнина* $\mathbb{R}^2$ *и удовлетворяващи равенството* (4.3.4), *т.е. в стационарните точки изразът* $\Delta = 0$, *а именно:*

а) $f(x,y) = y^4 + x^2$,

б) $f(x,y) = -y^4 - x^2$,

в) $f(x,y) = y^3 + x^2$,

г) $f(x,y) = xy^3$,

д) $f(x,y) = (x+y)^2$,

е) $f(x,y) = -(x+y)^2$.

Наистина, единствената стационарна точка за функциите а) – в) е точката $(x_0, y_0) = (0,0)$ и освен това в тази точка $\Delta = 0$ за всяка от функциите. При това функциите от подточка а) и б) удовлетворяват условията $f(x,y) - f(0,0) = y^4 + x^2 > 0$, съответно $f(x,y) - f(0,0) = -y^4 - x^2 < 0$, даже за всяко $(x,y) \neq (0,0)$, което означава, че в подточка а) функцията има строг локален минимум, равен на $f_{\min}(x,y) = f(0,0) = 0$, а в подточка б) – строг локален максимум със стойност $f_{\max}(x,y) = f(0,0) = 0$. В подточка в) е изпълнено $f(x,y) - f(0,0) = y^3 + x^2$, което е положително по положителната ординатна ос и отрицателно по отрицателната ординатна ос, и следователно и в този случай функцията няма локален екстремум.

За разлика от това, стационарните точки на функцията от подточка г) са всички точки от правата $y = 0$, т. е. точките с координати $(x_0, 0)$ за $x_0 \in \mathbb{R}$, и в тях е изпълнено равенството $\Delta = 0$. За да изследваме функцията за екстремум, разглеждаме следните разлики

$$f(x_0, y) - f(x_0, 0) = x_0 y^3 \text{ за } x_0 \neq 0 \quad \text{и} \quad f(x,y) - f(0,0) = xy^3 \text{ за } x_0 = 0.$$

Последните очевидно нямат постоянен знак в никаква околност на стационарната точка $(x_0, 0)$ и следователно функцията от подточка г) няма локален екстремум.

Стационарните точки на функциите д) и е) са всички точки от правата $x+y=0$, и освен това $\Delta = 0$ за всяка от двете функции. Обаче за функцията д) е валидно нестрогото неравенство $f(x,y)-f(x_0,-x_0) = (x+y)^2 \geq 0$, а за е) – неравенството $f(x,y) - f(x_0,-x_0) = -(x+y)^2 \leq 0$. Тъй като и в двата случая равенство се достига не само в конкретна стационарна точка $(x_0,-x_0)$, а и във всички останали точки от въпросната права, то функцията $f(x,y) = (x+y)^2$ има нестрог локален минимум, а $f(x,y) = -(x+y)^2$ – локален максимум (нестрог), и двата със стойност нула. □

Използвайки аналогията, можем да преминем към задачата за търсене на достатъчни условия за съществуване на локални екстремуми на функция на повече от две променливи, обобщавайки условията в Теорема 4.3.1. И така, нека точката $x^0 \in \mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$, отвореното множество $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ е нейна околност и функцията $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ е дефинирана и поне два пъти непрекъснато диференцируема в U, а точката x^0 е стационарна точка за f. В този случай, изследванията отново се свеждат до използване на формулата на Тейлор (4.1.3) с $n = 1$:

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

$$(\xi := x^0 + \vartheta(x - x^0),\ \vartheta = \vartheta(x) \in (0,1)),$$

отчитайки факта, че първите частни производни имат стойност нула в стационарните точки, т. е.

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0). \tag{4.3.8}$$

За улесняване на по-нататъшното изложение е припомнена следната важна дефиниция за дефинитна квадратична форма.

Дефиниция 4.3.1 *Квадратичната форма A*

$$A(x) = A(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j, \tag{4.3.9}$$

се нарича положително дефинитна (съотв. отрицателно дефинитна), ако за всеки ненулев вектор $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ е изпълнено $A(x) > 0$ (съотв. $A(x) < 0$) и знакопроменлива, ако съществуват вектори $x, y \in \mathbb{R}^m$, така че $A(x) > 0$, но $A(y) < 0$.

Имайки предвид еквивалентния запис (4.1.14), даден по-долу в стационарната точка x^0

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(\xi),$$

задачата се свежда до дефинитност на квадратичната форма на втория диференциал на разглежданата функция, като поради непрекъснатостта на вторите частни производни задачата може да се сведе до стойностите им в стационарната точка.

По-долу е формулирана теоремата, даваща достатъчно условие за съществуване на строг локален екстремум на функция на две и повече променливи.

Теорема 4.3.2 (Достатъчно условие) *Нека функцията $f : U \longrightarrow\in \mathbb{R}$ притежава непрекъснати частни производни $f''_{x_i x_j}$ $(i, j = 1 \div m)$ от втори ред в околността U на точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ и тази точка е стационарна за f, т.е.*

$$f'_{x_i}(x^0) = f'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_m^0) = 0 \qquad (i = 1 \div m). \tag{4.3.10}$$

Тогава, ако квадратичната форма

$$A(dx_1, \ldots, dx_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(x^0) dx_i dx_j, \tag{4.3.11}$$

т.е. вторият диференциал на функцията f в точката x^0, е положително дефинитна (отрицателно дефинитна) квадратична форма, то точката x^0 е точка на строг локален минимум (съответно точка на строг локален максимум) за функцията f. Ако квадратичната форма (4.3.11) *е недефинитна квадратична форма, то функцията f няма локален екстремум в точката x^0. Най-сетне, ако изразът* (4.3.11) *е равен на нула, то може да се случи както f да има локален екстремум в точката x^0, така и да няма такъв.*

При практическото използване на тази теорема възниква въпросът за установяване на дефинитността на дадена квадратична форма. За тази цел може да послужи например критерият на Силвестър, изучаван в курса по алгебра. Той се състои в следното.

Теорема 4.3.3 (Критерий на Силвестър) *Квадратичната форма A, дефинирана с (4.3.9), в която $a_{ij} = a_{ji}$ за $i, j = 1 \div m$, е положително дефинитна тогава и само тогава, когато*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,\ \Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0,$$

и отрицателно дефинитна ($\Leftrightarrow -A(x)$ е положително дефинитна), тогава и само тогава, когато

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \ldots, \qquad \textit{т.е.} \quad (-1)^k \Delta_k > 0 \quad (k = 1 \div m).$$

Сега по-внимателен прочит на теоремите, даващи достатъчни условия за съществуване на локален екстремум, показва, че Теорема 4.3.1 може да се разглежда като частен случай на Теорема 4.3.3, получен от нея за $m = 2$.

Следващият пример е разгледан с цел да се разясни по-добре смисълът на току-що формулираната теорема, както и да се осмисли нейното използване.

Пример 4.3.3 *Тук са разгледани три функции, които са дефинирани и притежават непрекъснати частни производни от произволен ред в цялото пространство $\mathbb{R}^3$, а именно:*

а) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z,$

б) $u = -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z,$

в) $u = x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 6z,$

и са изследвани за локални екстремуми.

Единствената стационарна точка на всяка една от трите функции е точката $M_0(1, 2, -3)$. За да се изследва знакът на втория диференциал в тази точка, се изисква да се пресметнат изразите

$$\Delta_1(M_0) = u''_{xx}(M_0), \quad \Delta_2(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3(M_0) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{vmatrix},$$

и да се определят техните знаци.

Тъй като за функцията от подточка а) е изпълнено

$$\Delta_1(M_0) = 2 > 0, \quad \Delta_2(M_0) = 4 > 0, \quad \Delta_3(M_0) = 8 > 0,$$

то, съгласно критерия на Силвестър, вторият диференциал на тази функция е положително дефинитна квадратична форма в точката $M_0(1, 2, -3)$, и следователно функцията има локален минимум в M_0 със стойност $u_{\min} = u(M_0) = u(1, 2, -3) = -14$.

За функцията от подточка б) имаме

$$\Delta_1(M_0) = -2 < 0, \quad \Delta_2(M_0) = 4 > 0, \quad \Delta_3(M_0) = -8 < 0,$$

което показва, отрицателна дефинитност на квадратичната форма на втория диференциал, и следователно функцията има локален максимум в M_0, чиято стойност е $u_{\max} = u(M_0) = u(1, 2, -3) = 14$.

За функцията от подточка в) са в сила неравенствата

$$\Delta_1(M_0) = 2 > 0, \quad \Delta_2(M_0) = 4 > 0, \quad \Delta_3(M_0) = -8 < 0,$$

което показва, че вторият диференциал не е дефинитна квадратична форма. Наистина, за положителна дефинитност се изисква

$$\Delta_1(M_0) > 0, \quad \Delta_2(M_0) > 0, \quad \Delta_3(M_0) > 0,$$

а за отрицателна дефинитност

$$\Delta_1(M_0) < 0, \quad \Delta_2(M_0) > 0, \quad \Delta_3(M_0) < 0,$$

а както се вижда, тези условия не са изпълнени. Следователно въпросната функция няма локален екстремум. Стационарната точка M_0 в случая е седловинна за u. $\square$

4.4 Условни екстремуми на функция на няколко променливи

В задачата за търсене на максимална и минимална стойност на функция на много променливи в област $D \subset \mathbb{R}^m$, разгледана в параграфи 4.2

и 4.3, остана открит проблемът за намиране на екстремалните стойности на функцията върху границата ∂D на областта D. Ако например D е кълбо, то възниква въпросът за търсене на екстремумите на функцията върху ограничаващата го сфера. На такива задачи е посветен настоящият параграф.

Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и функциите $f, \varphi_n : D \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots, k)$ са дефинирани и два пъти непрекъснато диференцируеми в D. Да означим с E множеството от точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in D$, в които дадените функции φ_n се анулират, т.е.

$$E = \{x |\, \varphi_n(x) = 0,\ n = 1, 2, \ldots, k, \quad x \in D\}.$$

Дефиниция 4.4.1 *Уравненията*

$$\varphi_n(x) = 0\ (n = 1, 2, \ldots, k) \tag{4.4.1}$$

се наричат условия на връзките.

Дефиниция 4.4.2 *Точката $x^0 \in D$ се нарича точка на условен екстремум на функцията f при условие, че са изпълнени условията на връзките* (4.4.1)*, ако тя е точка на обичаен (локален) екстремум на тази функция, разглеждана само върху множеството E, в което са изпълнени дадените условия. С други думи, стойността $f(x^0)$ се сравнява не с всички стойности в околност на x^0, а само с тези от множеството E.*

Както се вижда, тази дефиниция се различава от дадената в параграф 4.2 дефиниция на (безусловен) локален максимум по това, че се разглеждат само стойностите на $f(x)$ върху множеството E.

Задачата за намиране на условен екстремум е свързана с изразяване на част от променливите чрез останалите, напр. $x_{m-k+1}, \ldots, x_m$ чрез $x_1, \ldots, x_{m-k}$ и заместване във функцията f. Обаче, разрешимостта в явен вид може да се окаже достатъчно затрудняваща или даже невъзможна. Поради тази причина е приведен друг начин на определяне на точките на условен екстремум, свързан с допълнително въведена функция.

Именно, за да се изследва за екстремум функцията $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ при ограничения

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \end{array}\right.$$

се конструира *функцията на Лагранж*

$$L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) + \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

където параметрите $\lambda_n \, , n = 1, 2, \dots, k$ се наричат *множители на Лагранж*. За получената функция се решава задачата за локален екстремум, като стационарните точки са решения на следната система:

$$\left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}{\partial x_2} = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}{\partial x_m} = 0, \\ \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ \lambda_n \neq 0 \, , n = 1, 2, \dots, k. \end{array} \right.$$

Видът на екстремума се определя от знака на втория диференциал в съответната стационарна точка. По-надолу е дадено достатъчно условие за съществуване на условен екстремум.

Теорема 4.4.1 (ДУ за условен екстремум) *Нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и функциите $f, \varphi_n : D \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots, k)$ са два пъти непрекъснато диференцируеми в D. Ако точката x^0 удовлетворява условията на връзките и е стационарна точка за функцията на Лагранж, и ако вторият диференциал на функцията на Лагранж в тази точка е положително (отрицателно) дефинитна квадратична форма на променливите $dx_1, \dots, dx_m$, при условие, че те удовлетворяват системата от уравнения:*

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_m} dx_m = 0, \quad n = 1, \dots k,$$

то точката x^0 е точка на строг условен минимум (максимум) за дадената функция, относно уравненията на връзките.

При това следва да се има предвид, че ако вторият диференциал на функцията на Лагранж се окаже положително (отрицателно) определен и без отчитане на условията на връзките в разглежданата точка, то той ще бъде такъв, разбира се, и при изпълнението им.

Като пример е разгледана една елементарна геометрична задача: измежду всички правоъгълни триъгълници с дадена сума на катетите да се намери този с най-малката хипотенуза. Ако означим с x и y катетите на триъгълника, стигаме до следната формулировка.

Пример 4.4.1 *Ако множеството $E \subset \mathbb{R}^2$ е множеството на всички точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяващи условията $x > 0$, $y > 0$, $x + y = s$, т.е.*

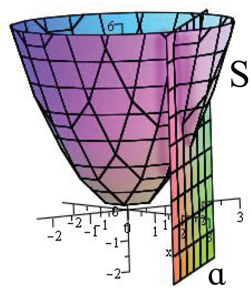
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0, \; y > 0, \; x + y = s\},$$

да се намери минималната стойност на функцията $f(x, y) = x^2 + y^2$ върху множеството E.

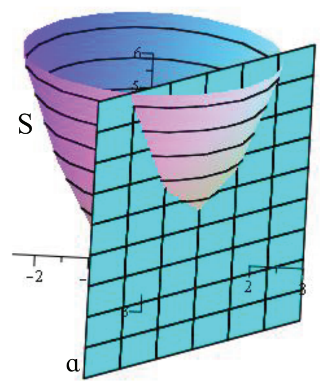
Разбира се, задачата се решава елементарно, като се изрази y чрез x и след това се намери минимумът на получената функция на една променлива. Ние обаче използваме задачата за илюстриране на развитите по-горе методи. И така, съставяме функцията на Лагранж

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda(x + y = s) = x^2 + y^2 + \lambda(s - x - y)$$

и търсим нейните локални екстремуми като функция на x и y (а λ е параметър). Тъй като $L''_{xx} = L''_{yy} = 2$ и $L''_{xy} = L''_{yx} = 0$, то в стационарната точка $(x_0, y_0) = (s/2, \; s/2)$ функцията L има локален минимум в стационарната точка, и следователно функцията f има условен минимум там и този минимум е $f_{\min} = f(x_0, y_0) = f(s/2, \; s/2) = s^2/2$. $\square$



Фигура 4.4.1



Фигура 4.4.2

Геометрически това означава, че точката от параболоида $z = x^2 + y^2$, която се намира в равнината $x + y = s$ и лежи над точката с координати $(s/2,\ s/2)$, е най-ниско разположената точка на параболоида, лежаща в тази равнина. Този пример показва, че точките, в които дадена функция достига условен екстремум, в общия случай не са точки на екстремум на дадената функция.

4.5 Абсолютни екстремуми на функция на няколко променливи

В много случаи е важно да се намерят най-голямата и най-малката стойност на дадена функция върху цялото дефиниционно множество, т.е. абсолютният (глобалният) минимум и максимум на функцията. Да предположим, че дефиниционното множество $D \subset \mathbb{R}^m$ на функцията $f(x)$ е компактно множество в $\mathbb{R}^m$. Тогава по теоремата на Вайерщрас (Теорема 2.4.1), $f(x)$ достига най-малката и най-голямата си стойност в някакви точки на D. Тогава се получават следните две алтернативни възможности: абсолютният максимум може да се достигне във вътрешна или контурна точка на D. Ако максимумът се достига във вътрешна точка, то той е и локален, и ние можем да използваме развитата дотук теория. Разбира се, всичко казано тук се отнася и за абсолютния минимум. Ако екстремумът е в точка от контура ∂D на дефиниционната област, то той е условен екстремум, и може да бъде намерен по алгоритъма, описан в предния параграф.

Така задачата за намиране на абсолютните екстремуми се свежда до намирането на стационарните точки в множеството и локалните екстемуми, условните екстремуми по контура (или съставните му части) и сравняването на тези стойности. Най-голямата от тях е абсолютен максимум, а най-малката е абсолютен минимум. По-долу, за по-голяма яснота е разгледан следният пример.

Пример 4.5.1 *Ако $E \subset \mathbb{R}^2$ е множеството на всички точки (x, y), удовлетворяващи условията $x \geq -1$, $y \geq -1$ и $x + y \leq 1$, т.е.*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq -1, \ y \geq -1, \ x + y \leq 1\},$$

да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x, y) = x^2 + y^2$ върху множеството E.

Започваме с локалните екстемуми на дадената функция, чиято единствена стационарна точка е $(0, 0)$, и тя принадлежи на множеството E. В тази точка функцията има локален минимум и този минимум е $f_{\min} = f(0, 0) = 0$. По контура се търсят няколко условни екстремуми – по всяка една от страните на триъгълника. Така например, от решението на Пример 4.4.1 може да се заключи, че f има условен минимум, ако $x + y = 1$, и този минимум има стойност $f(1/2, 1/2) = 1/2$. Ако $x = -1$ (съответно $y = -1$), функцията отново има условни минимуми и те са съответно в точките $(-1, 0)$ и $(0, -1)$, със стойност $f(-1, 0) = f(0, -1) = 1$. Най-накрая в точките $(-1, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, -1)$, които са върхове на триъгълника и поради това също са контурни точки, стойностите на функцията са съответно $f(-1, -1) = 2$, $f(-1, 2) = f(2, -1) = 5$. За пресмятане на абсолютните екстремуми трябва да се сравнят числата $f(0, 0) = 0$, $f(1/2, 1/2) = 1/2$, $f(-1, 0) = f(0, -1) = 1$, $f(-1, -1) = 2$ и $f(-1, 2) = f(2, -1) = 5$, откъдето се вижда, че абсолютният минимум в множеството съвпада с локалния минимум, а абсолютният максимум – със стойностите в контурните точки $(-1, 2)$ и $(2, -1)$ на множеството E, т. е.

$\max\limits_{(x,y)\in E} f(x, y) = f(-1, 2) = f(2, -1) = 5$ и $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$ □

В някои случаи подобни разсъждения могат да бъдат проведени и за некомпактни области. Така например, ако $f(x)$ е непрекъсната функция в $\mathbb{R}^m$, за която $\lim\limits_{||x||\to\infty} f(x) = \infty$, то $f(x)$ достига минималната си стойност в някоя точка. Ако $f(x)$ е непрекъснато диференцируема функция с горното свойство, и има само една стационарна точка, тогава $f(x)$ достига абсолютния си минимум в нея.

4.6 Екстремуми на неявна функция

Нека $x^0 \in \mathbb{R}^m$ $(m = 1, 2, \dots)$, $M_0(x^0, y_0)$ е точка в $\mathbb{R}^{m+1}$ и нека F е функция, дефинирана в нейна околност $U_{M_0} \subset \mathbb{R}^{m+1}$, т.е $F : U_{M_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, като при това $F(x^0, y_0) = 0$, в U_{M_0} съществуват първите частни производни на F, $F'_y \neq 0$ в M_0 и F'_y е непрекъсната там. Тогава уравнението

$$F(x, y) = 0, \tag{4.6.1}$$

дефинира неявна функция f в някаква околност $U = U_{x^0} \subset \mathbb{R}^m$ на точката x^0, т.е

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R} \quad (f(x^0) = y_0). \tag{4.6.2}$$

Възможно е тази функция да има локални екстремуми и тогава се поставя задачата за тяхното намиране, която в случай на два пъти непрекъснатата диференцируемост на F в точката (x^0, y_0) се осъществява по алгоритъма, описан в параграфи 4.2. и 4.3.

Нека сега $F : U_{M_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ е два пъти непрекъснато диференцируема в точката $M_0 = (x^0, y_0)$ и нека f е неявната функция (4.6.2), дефинирана от уравнението (4.6.1). В случай, че $m = 1$, неявната функцията f е функция на една променлива и съгласно формулата (3.7.8) $(F'_x(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0))$, стационарните точки се намират като решения на системата

$$\left|\begin{array}{l} F'_x(x, y) = 0, \\ F(x, y) = 0, \\ F'_y(x, y) \neq 0. \end{array}\right. \tag{4.6.3}$$

Евентуалното съществуване на екстремума може да се установи например от знака на втората производна $f''(x_0)$, и тъй като съгласно формулата (3.7.11) числителят на f'' се редуцира до $F''_{xx}(x_0, y_0)$ в стационарните точки на f, то

$$f''(x_0) = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{4.6.4}$$

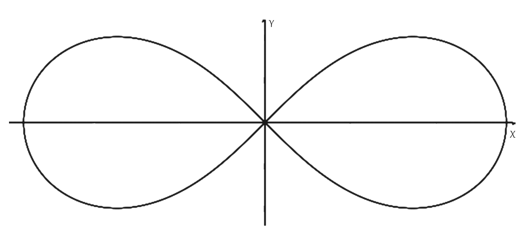
За по-пълно усвояване на описания метод е разгледан следният пример.

Пример 4.6.1 *Уравнението*

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

задава четири неявни функции $y = f_k(x)$ $(k = 1 \div 4)$, според това в кой квадрант се намира точката, в чиято околност се търси неявната функция, и тук са намерени техните локални екстремуми.

Ако означим
$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2),$$
то уравнението $F(x,y)=0$ би могло да задава единствена неявна функция в околността на някоя точка, само ако $F'_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+1) \neq 0$ в нея, което дава $y \neq 0$. Системата (4.6.3) за намиране на стационарните точки за тази функция има вида
$$\left|\begin{array}{l} 4x(x^2+y^2-1)=0 \\ (x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0 \\ 4y\neq 0, \end{array}\right.$$
и тъй като $x=0$ не е решение (защото тогава и $y=0$), системата е еквивалентна на
$$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ (x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ 1-2(2x^2-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 4x^2=3 \\ 4y^2=1, \end{array}\right.$$
откъдето се получават четирите точки $M_k(x_k,y_k)$
$$M_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right), M_2=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right), M_3=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right), M_4=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right),$$
и нека $y=f_k(x)$ е неявната функция, дефинирана в околност на точката M_k $(k=1\div 4)$. Тъй като $F''_{xx}(x,y)=4(3x^2+y^2-1)>0$ за точките M_k, то знакът на (4.6.4) се определя от знака на стойността на $F'_y(M_k)=8y_k$, който зависи от знака на y_k. И така, съгласно (4.6.4), извършвайки пресмятанията с координатите на $M_{1,2}$, получаваме $f''_1(x_1)<0$, $f''_2(x_2)<0$, и следователно $f_{1,2}$ имат максимум със стойност $1/2$ в съответната точка, докато в точките $M_{3,4}$ е в сила $f''_3(x_3)>0$, $f''_4(x_4)>0$, и следователно $f_{3,4}$ имат минимум в съответната точка и той е равен на $-1/2$, т.е.
$$f_{1\max}=f_1(x_1)=f_{2\max}=f_2(x_2)=\frac{1}{2},\ f_{3\min}=f_3(x_3)=f_{4\min}=f_4(x_4)=-\frac{1}{2}.$$
Точката $(0,0)$ е особена точка, защото $F'_y(0,0)=0$, по-конкретно тя е точка



Фигура 4.6.1: Лемниската на Бернули

на самопресичане за лемнискатата на Бернули, чието уравнение е даденото в този пример.

В интерес на истината, броят на неявните функции може да се редуцира до две, обединявайки f_1 с f_2 и f_3 с f_4.

В случай, че $m > 1$, неявната функцията f е функция на повече от една променлива (тъй като $x = (x_1, \dots, x_m)$), и съгласно формулата (3.7.10) $(F'_{x_k}(x^0, y_0) = 0 \Leftrightarrow f'_{x_k}(x_0))$, стационарните точки се намират като решения на системата:

$$\left| \begin{array}{l} F'_{x_k}(x,y) = 0, \quad k = 1 \div m, \\ F(x,y) = 0, \\ F'_y(x,y) \neq 0. \end{array} \right. \tag{4.6.5}$$

Предвид формулите (3.7.12) и (3.7.13), стойностите на вторите частни производни $f''_{x_k x_j}(x)$ в стационарните точки са:

$$f''_{x_k x_k}(x^0) = -\frac{F''_{x_k x_k}(x^0, y_0)}{F'_y(x^0, y_0)}, \quad f''_{x_k x_j}(x^0) = -\frac{F''_{x_k x_j}(x^0, y_0)}{F'_y(x^0, y_0)} \quad (k \neq j), \tag{4.6.6}$$

което позволява решението на задачата да се довърши по алгоритима от Параграфи 4.2 и 4.3.

Глава 5

Многократни интеграли

5.1 Понятие за обем в $\mathbb{R}^m$. Множество с мярка нула

Да означим с T_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) съвкупността от всички затворени кубове от вида

$$Q^m = Q^{m,k} = \left\{ x : x \in \mathbb{R}^m, \frac{l_i}{10^k} \leqq x_i \leqq \frac{l_i + 1}{10^k};\ i = 1, 2, \ldots, m \right\}, \qquad (5.1.1)$$

където $l_i \in \mathbb{Z}$. За удобство в по-нататъшното изложение кубовете от (5.1.1) се означават просто с Q^m.

Дефиниция 5.1.1 *Системата T_k се нарича разделяне на $\mathbb{R}^m$ от ранг k, а кубовете Q^m – кубове от ранг k.*

В частност за $m = 1$ множествата Q^m са интервали, а за $m = 2$ – квадрати. По-нататък ние няма да се интересуваме от едномерния случай и затова (за да не усложняваме допълнително изложението), ще предполагаме, че $m \geqq 2$, въпреки че всичко казано по-долу е вярно и за $m = 1$ (с точност до терминология).

Дефиниция 5.1.2 *Числото $\dfrac{1}{10^{km}}$ се нарича m-мерен обем на куба Q^m и тук за него е използвано означението $\mu(Q^m)$, т.е.*

$$\mu(Q^m) = \frac{1}{(10^k)^m} = \frac{1}{10^{km}},\ k = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (5.1.2)$$

Дефиниция 5.1.3 *Ако $E \subset \mathbb{R}^m$ и E представлява обединение на крайно или изброимо много кубове, Q_j^m от даден ранг k $(k = 1, 2, \ldots)$, т.е. $E = \cup_j Q_j^m$ (крайно или изброимо обединение), то $\mu(E)$ се дефинира като*

$$\mu(E) = \sum_j \mu(Q_j^m). \tag{5.1.3}$$

Нека $G \subset \mathbb{R}^m, G-$ отворено. Да означим със $S_k = S_k(G), k = 0, 1, 2, \ldots$ множеството от точките на всички m-мерни кубове, от ранг k, изцяло лежащи в G. Тогава

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_k \subset S_{k+1} \subset \ldots \tag{5.1.4}$$

и следователно

$$\mu(S_0) \leqq \mu(S_1) \leqq \ldots \leqq \mu(S_k) \leqq \mu(S_{k+1}) \leqq \ldots \tag{5.1.5}$$

и поради това съществува крайната или безкрайната граница $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k)$.

Дефиниция 5.1.4 *Крайната или безкрайната граница $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k(G))$ се нарича m-мерна мярка или m-мерен обем на множеството G и се означава с $\mu(G)$, т.е.*

$$\mu(G) = \lim_{k\to\infty} \mu(S_k(G)). \tag{5.1.6}$$

По силата на тази дефиниция, $\mu(G) > 0$ за всяко отворено непразно множество $G \subset \mathbb{R}^m$ и $\mu(G) < \infty$, ако G е и ограничено.

По-долу са дадени няколко елементарни, но важни свойства на току-що дефинираната мярка, които са основни за всяка мярка.

Лема 5.1.1 (адитивност на мярката) *Нека $G^{'}, G^{''} \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества и $G^{'} \cap G^{''} = \varnothing$. Тогава е в сила равенството*

$$\mu(G^{'} \cup G^{''}) = \mu(G^{'}) + \mu(G^{''}). \tag{5.1.7}$$

Доказателство. Нека $G = G^{'} \cup G^{''}$ и нека $S_k = S_k(G)$, $S_k^{'} = S_k(G^{'})$ и $S_k^{''} = S_k(G^{''})$. Тъй като множествата $G^{'}$ и $G^{''}$ не се пресичат, същото се отнася и за $S_k^{'}$ и $S_k^{''}$. Очевидно е, че $S_k = S_k^{'} \cup S_k^{''}$, поради което съгласно (5.1.3) е изпълнено

$$\mu(S_k) = \mu(S_k^{'} \cup S_k^{''}) = \mu(S_k^{'}) + \mu(S_k^{''}),$$

което потвърждава верността на равенството (5.1.7) след граничен преход при $k \to \infty$. □

По-надолу е разгледан общият случай за произволни множества, независимо от това дали се пресичат или не.

Лема 5.1.2 (полуадитивност на мярката) *Нека $G^{'}, G^{''} \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества. Тогава е в сила равенството*

$$\mu(G^{'} \cup G^{''}) \leqq \mu(G^{'}) + \mu(G^{''}). \tag{5.1.8}$$

Доказателство. Верността на (5.1.8) автоматично следва след извършване на граничен преход в неравенството

$$\mu(S_k^{'} \cup S_k^{''}) \leqq \mu(S_k^{'}) + \mu(S_k^{''}),$$

при $k \to \infty$. □

Лема 5.1.3 (монотонност на мярката) *Ако $G^{'}, G^{''} \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества и $G^{'} \subset G^{''}$, то е в сила неравенството*

$$\mu(G^{'}) \leqq \mu(G^{''}). \tag{5.1.9}$$

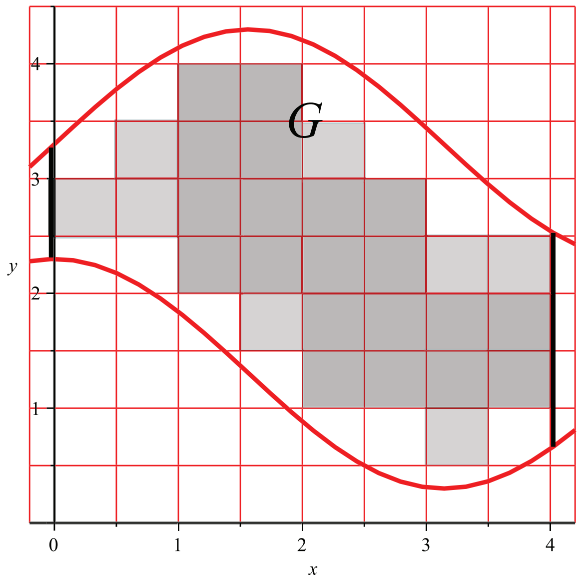
Доказателство. От условието $G^{'} \subset G^{''}$ веднага следва, че за всяко $k = 1, 2, \dots$ е изпълнено включването

$$S_k(G^{'}) \subset S_k(G^{''}).$$

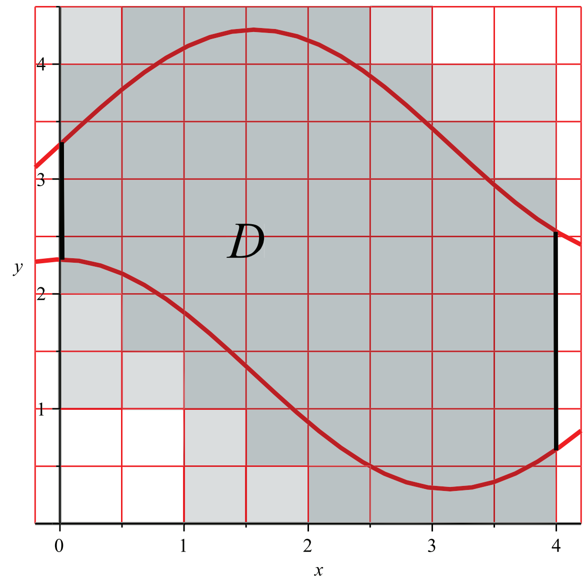
Тогава по силата на (5.1.3) е изпълнено неравенството

$$\mu(S_k(G^{'})) \leqq \mu(S_k(G^{''})),$$

което при $k \to \infty$ води до истинността на твърдението на лемата. □



Фигура 5.1.1: $S_k \subset S_{k+1}$



Фигура 5.1.2: $S_k^* \supset S_{k+1}^*$

За построяване на теорията на многократните интеграли се оказва целесъобразно въвеждането на понятието горна мярка на множество. За целта нека $D \subset \mathbb{R}^m$ и да означим със $S_k^* = S_k^*(D)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, множеството от точките на всички m-мерни кубове с ранг k, всеки от които се пресича с D. Тогава са валидни включванията:

$$S_0^* \supset S_1^* \supset S_2^* \supset \ldots S_k^* \supset \ldots, \tag{5.1.10}$$

откъдето

$$\mu(S_0^*) \geqq \mu(S_1^*) \geqq \ldots \geqq \mu(S_k^*) \geqq \ldots. \tag{5.1.11}$$

Ако множеството D е ограничено, то $0 \leqq \mu(S_k^*) < \infty$ за всяко $k = 0, 1, 2, \ldots$, а ако D е неограничено, то $\mu(S_k^*) = \infty$. И в двата случая границата $\lim \mu(S_k^*(D))$ съществува, при това в първия случай тази граница е крайна, а във втория – безкрайна.

Дефиниция 5.1.5 *Границата $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k^*(D))$ се нарича горна m-мерна мярка на множеството D (по-точно горна m-мерна мярка на Жордан) и се означава с $\overline{\mu}(D)$. Така*

$$\overline{\mu}(D) = \lim_{k\to\infty} \mu(S_k^*). \tag{5.1.12}$$

Горната мярка притежава свойствата монотонност и полуадитивност, които са формулирани в следващите две леми.

Лема 5.1.4 (монотонност на горната мярка) *Ако* $D^{'} \subset D^{''} \subset \mathbb{R}^m$, *то е в сила неравенството*

$$\overline{\mu}(D^{'}) \leqq \overline{\mu}(D^{''}). \tag{5.1.13}$$

Доказателство. От условието $D^{'} \subset D^{''}$ веднага следва, че за всяко $k = 1, 2, \ldots$ е изпълнено включването

$$S_k^*(D^{'}) \subset S_k^*(D^{''}).$$

Тогава по силата на (5.1.3) е изпълнено неравенството

$$\mu(S_k^*(D^{'})) \leqq \mu(S_k^*(D^{''})),$$

което при $k \to \infty$ води до истинността на твърдението (5.1.13) на доказваната лема. $\square$

Лема 5.1.5 (полуадитивност на горната мярка) *Ако* $D_i \subset \mathbb{R}^m$ *за* $i = 1 \div s$ *и* $D = \cup_{i=1}^s D_i$, *то е в сила равенството*

$$\overline{\mu}(D) \leqq \sum_{i=1}^{s} \overline{\mu}(D_i). \tag{5.1.14}$$

Доказателство. Нека $D = \cup_{i=1}^s D_i$, тогава $S_k^*(D) = \cup_{i=1}^s S_k^*(D_i)$ за $k = 0, 1, 2, \ldots$, откъдето съгласно (5.1.3) следва, че

$$\mu(S_k^*(D)) \leqq \sum_{i=1}^{s} \mu(S_k^*(D_i)).$$

Верността на неравенството (5.1.14) следва от горното при $k \to \infty$. $\square$

Дефиниция 5.1.6 *Ако* $\overline{\mu}(D) = 0$, *то множеството* D *се нарича множество с мярка нула (т.е. с Жорданова мярка нула) и се записва просто* $\mu(D) = 0$. *Казва се също, че множеството* D *има мярка нула. Празното множество по дефиниция има мярка нула, т.е.* $\mu(\varnothing) = 0$.

5.2 Измерими множества в $\mathbb{R}^m$

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е ограничено отворено множество и $[G]$ е неговата затворена обвивка. Да означим със $S_k^* = S_k^*([G])$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), множеството от точките на всички m-мерни кубове с ранг k, всеки от които се пресича с $[G]$, а със $S_k = S_k(G)$ множеството от точките на всички m-мерни кубове от ранг k, съдържащи се в G. Очевидно е, че $S_k \subset S_k^*$ за всяко $k = 0, 1, 2, \ldots$ и поради това

$$\mu(S_k) \leq \mu(S_k^*),$$

откъдето при $k \to \infty$ се получава, че

$$\mu(G) \leq \overline{\mu}([G]).$$

Дефиниция 5.2.1 *Множеството $G \subset \mathbb{R}^m$ (G-отворено и ограничено) се нарича измеримо (кубируемо, а при $m = 2-$ квадрируемо), ако неговата мярка е равна на горната мярка на $[G]$, т.е.*

$$\mu(G) = \overline{\mu}([G]). \tag{5.2.1}$$

За опростяване на терминологията в по-нататъшното изложение и в случая $m = 2$ измеримите множества се наричат също кубируеми.

Теорема 5.2.1 *Ограниченото и отворено множество $G \subset \mathbb{R}^m$ е измеримо (кубируемо) тогава и само тогава, когато контурът му има мярка нула, т.е. $\mu(\partial G) = 0$.*

Доказателство. Нека със s_k е означено множеството от точки на кубовете, всеки от които се съдържа в множеството S_k^*, но не се съдържа в множеството S_k. Тъй като $\partial G = [G] \setminus G$, то s_k се състои единствено от точките на тези кубове, които се пресичат с контура на множеството G, поради което

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \overline{\mu}(\partial G).$$

Очевидно, предвид (5.1.3) е изпълнено

$$\mu(s_k) = \mu(S_k^*) - \mu(S_k), \tag{5.2.2}$$

което заедно с (5.2.1) дава

$$\lim_{k\to\infty} \mu(S_k^*) = \lim_{k\to\infty} \mu(S_k), \tag{5.2.3}$$

т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \mu(s_k) = 0, \tag{5.2.4}$$

или с други думи $\mu(\partial G) = 0$.

Обратно, ако е изпълнено условието $\mu(\partial G) = 0$, т.е. (5.2.4), то поради съществуването на границите $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k)$, от (5.2.2) следва (5.2.1), с което лемата е доказана. $\square$

Дефиниция 5.2.2 *Затворената обвивка $[G]$ на отвореното и измеримо множество $G \subset \mathbb{R}^m$ също се нарича измеримо множество и по дефиниция*

$$\mu([G]) = \mu(G). \tag{5.2.5}$$

Забележка 5.2.1 *Естествеността на дефиниция 5.2.2 следва от теорема 5.2.1.*

5.3 Дефиниция на многократен интеграл

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено и измеримо (кубируемо) множество.

Дефиниция 5.3.1 *Системата $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ от измерими множества G_i се нарича разделяне на множеството G, ако:*
1) $G_i \subset G, i = 1 \div i_0$,
2) $G_i \cap G_j = \varnothing, i \neq j$,
3) $\cup [G_i] = [G]$.

Дефиниция 5.3.2 *Числото $\delta_\tau = \max\limits_{1\leqq i\leqq i_0} d(G_i)$, където $d(G_i)$ е диаметърът на множеството G_i, се нарича диаметър на разделянето τ (то показва колко е дребно разделянето τ).*

Лема 5.3.1 *Ако $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ е разделяне на G, то*

$$\mu(G) = \sum_{i=1}^{i_0} \mu(G_i). \tag{5.3.1}$$

Доказателство. Наистина, прилагайки последователно Лема 5.1.1, Лема 5.1.3, равенството (5.2.1), свойство 3 на Дефиниция 5.3.1 за разделяне, Лема 5.1.5 и отново равенство (5.2.1), получаваме

$$\sum_{i=1}^{i_0} \mu(G_i) = \mu\left(\cup_{i=1}^{i_0} G_i\right) \leq \mu(G) = \overline{\mu}([G]) =$$

$$= \overline{\mu}\left(\cup_{i=1}^{i_0} [G_i]\right) \leq \sum_{i=1}^{i_0} \overline{\mu}([G_i]) = \sum_{i=1}^{i_0} \mu(G_i),$$

което доказва лемата. □

За простота на означението, често се използва по-краткият запис $\{G_i\}$ вместо $\{G_i\}_{i=1}^{i_0}$.

Дефиниция 5.3.3 *Нека $\tau = \{G_i\}$ и $\tau' = \left\{G'_j\right\}$ са две разделяния на отвореното и измеримо множество G. Разделянето τ' се нарича вписано в разделянето τ, ако за всеки елемент $G'_j \in \tau'$ съществува елемент $G_i \in \tau$, такъв че $G'_j \subset G_i$. Записва се $\tau' \succ \tau$ или $\tau \prec \tau'$.*

Основни свойства на разделянията на дадено множество се дават със следната лема.

Лема 5.3.2 *В сила са следните свойства:*
1) Ако $\tau \prec \tau'$ и $\tau' \prec \tau''$, то $\tau \prec \tau''$
2) За всеки две разделяния $\tau' = \{G'_i\}$ и $\tau'' = \left\{G''_j\right\}$ на отвореното и измеримо множество G, съществува разделяне τ, такова че $\tau' \prec \tau$ и $\tau'' \prec \tau$.

Доказателство. Наистина, свойство 1 е очевидно. Като упътване към свойство 2, за разделянето τ може да се вземе например съвкупността от всевъзможните непразни сечения $G'_i \cap G''_j$. □

Дефиниция 5.3.4 *Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено и измеримо множество, функцията $f : [G] \longrightarrow \mathbb{R}$ и $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ е разделяне на множеството G. Тогава сумата*

$$\sigma_\tau(f) := \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu(G_i), \tag{5.3.2}$$

където

$$\xi^{(i)} \in [G_i] \quad i = 1, \ldots, i_0,$$

се нарича риманова интегрална сума на функцията f.

Дефиниция 5.3.5 *Крайната граница*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f), \tag{5.3.3}$$

ако съществува, се нарича многократен интеграл от функцията f върху измеримото отворено множество G (или все едно $[G]$), а функцията се нарича интегруема в риманов смисъл върху множеството G (или $[G]$). Означава се по кой да е от следните начини:

$$\int f \mathrm{d}G, \ \int f(x) \mathrm{d}G, \ \underset{G}{\int \cdots \int} f(x_1, x_2, \dots, x_m) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_m.$$

Множеството G, съответно $[G]$, се нарича област на интегриране.

Границата (5.3.3) се среща тук за първи път, и затова се нуждае от прецизиране.

Дефиниция 5.3.6 *Числото A се нарича интеграл от функцията f върху отвореното и измеримо множество G, ако за всяка редица от разделяния $\tau_n = \left\{G_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{i_0^{(n)}}$ на множеството G, с $\delta_{\tau_n} \to 0$ при $n \to \infty$, и каквито и да са точките*

$$\xi_n^{(i_n)} \in [G_i^{(n)}], \quad i_n = 1, 2, \dots, i_0^{(n)}, \ n = 1, 2, \dots,$$

е изпълнено равенството

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_{\tau_n}(f; \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \dots, \xi_n^{(i_0^{(n)})}) = A.$$

5.4 Съществуване на многократния интеграл

Следвайки аналогията с риманов интеграл на функция на една реална променлива, започваме със следната важна теорема, даваща необходимо условие за интегруемост.

Теорема 5.4.1 *Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено и измеримо множество и функцията $f : [G] \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема върху него. Тогава f е ограничена върху множеството $[G]$.*

Доказателство. Извършва се аналогично на случая на функция на една променлива с допускане на противното. $\square$

Както и в едномерния случай, може да се направи следната забележка.

Забележка 5.4.1 *Обратното невинаги е вярно. Като пример може да послужи следната функция $f : [G] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($G \subset \mathbb{R}^m$ – непразно, отворено и измеримо), която в известен смисъл обобщава функцията на Дирихле*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x_i \in \mathbb{Q}, \ \forall\, i \\ 0, & \exists x_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad (i = 1 \div m,\ x = (x_1, x_2, \dots x_m) \in [G]).$$

Твърдението се установява лесно, ако се разгледат две различни суми от вида (5.3.2), като в едната сума точките $\xi^{(i)} \in \mathbb{Q}^m \cap [G]$, а в другата – на неговото допълнение до множеството $[G]$. Очевидно е, че в първия случай сумата дава мярката на множеството G, а във втория – нула.

По-нататък в този параграф се предполага, че функцията $f : [G] \longrightarrow \mathbb{R}$ е ограничена върху затворената обвивка $[G]$ на отвореното и измеримо множество $G \subset \mathbb{R}^m$. При тези предположения, както и в едномерния случай, има смисъл да се разглеждат горните и долните суми на Дарбу за f, дефинирани по начина, описан по-долу.

Дефиниция 5.4.1 *Нека $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{i_0}$ е разделяне на множеството G и*

$$m_i = \inf_{x \in [G_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [G_i]} f(x),$$

за $i = 1, 2, \dots, i_0$. Тогава сумите

$$s_\tau(f) := \sum_{i=1}^{i_0} m_i\, \mu(G_i), \quad S_\tau(f) := \sum_{i=1}^{i_0} M_i\, \mu(G_i),$$

се наричат съответно долна и горна сума на Дарбу за функцията f.

Сумите на Дарбу s_τ и S_τ са свързани с интегралната сума на Риман със следното очевидно неравенство

$$s_\tau \le \sigma_\tau \le S_\tau.$$

Освен това, както и в едномерния случай, за всеки две разделяния τ_1 и τ_2 е валидно неравенството $s_{\tau_1} \le S_{\tau_2}$.

Теорема 5.4.2 *Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено и измеримо множество и функцията $f : [G] \longrightarrow \mathbb{R}$ е ограничена в $[G]$. Функцията f е интегруема в риманов смисъл върху множеството G тогава и само тогава, когато*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{5.4.1}$$

При изпълняването на тези условия е в сила равенството

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \; S_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} \; s_\tau = \int f(x) \mathrm{d}G.$$

Условието (5.4.1) *е равносилно на*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \omega(f;\, [G_i])\, \mu(G_i) = 0, \tag{5.4.2}$$

където $\omega(f;\, [G_i])$ е осцилацията на функцията f върху множеството $[G_i]$, т. е. $\omega(f;\, [G_i]) = \sup\limits_{x', x'' \in G_i} [f(x'') - f(x')]$.

Доказателството на тази теорема също е абсолютно аналогично на едномерния случай. $\square$

По-надолу е дадено и едно достачъчно условие за интегруемост, също по аналогия с едномерния случай.

Теорема 5.4.3 *Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено и измеримо множество и функцията $f : [G] \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в $[G]$. Тогава функцията f е интегруема в риманов смисъл върху множеството G.*

Доказателство. Наистина, от измеримостта на множеството G следва неговата ограниченост. Функцията f, бидейки непрекъсната върху затвореното и ограничено множество $[G]$, е равномерно непрекъсната в $[G]$. Понататък доказателството върви аналогично на едномерния случай и лесно се получава оценката

$$S_\tau - s_\tau \leq \omega(\delta_\tau;\, f)\, \mu(G),$$

където

$$\omega(\delta;\, f) = \omega(\delta;\, f; G) = \sup_{\rho(x', x'') \leq \delta} [f(x'') - f(x')], \quad x', x'' \in G,$$

е модулът на непрекъснатост на функцията f. От последната оценка и Теорема 5.4.2 веднага следва верността на доказваното твърдение. $\square$

Да припомним, че съгласно дефиницията за горна мярка на множество, сумата от мерките на кубове от ранг k, които се пресичат с дадено множество с мярка нула, клони към нула, когато $k \to \infty$, и следователно, когато диаметрите на разглежданите кубове клонят към нула. Нещо повече, аналогично свойство остава в сила и за произволно разделяне на дадено измеримо множество, именно, ако диаметърът на разделянето клони към нула, то сумата от мерките на елементите на разделянето, които се пресичат с множество с мярка нула, също клони към нула.

Нека сега $\tau = \{G_i\}$ е разделяне на отвореното и измеримо множество G и $E \subset [G]$. Да означим с τ_E съвкупността на всички елементи на разделянето τ, чиито затворени обвивки се пресичат с множеството E, т.е.

$$\tau_E = \{G_i : \ G_i \in \tau, \ [G_i] \cap E \neq \varnothing\}. \tag{5.4.3}$$

Лема 5.4.1 *Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено и измеримо множество, $E \subset [G]$ и $\mu(E) = 0$. Тогава*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{G_i \in \tau_E} \mu(G_i) = 0. \tag{5.4.4}$$

Сумирането във формулата (5.4.4) *се извършва само по тези индекси i, за които $G_i \in \tau_E$.*

Тази лема позволява от римановите интегрални суми (5.3.3) да се пропуснат събираемите, които съответстват на елементите на разделянето, които се пресичат с дадено фиксирано множество с мярка нула, например с границата на отвореното и измеримо множество, по което се извършва интегрирането.

Преди да формулираме това твърдение като отделна теорема, да въведем някои допълнителни означения.

Нека G е отворено и измеримо множество, $\tau = \{G_i\}$ е негово разделяне и множеството $E \subset [G]$. Да означим с $\tau(E)$ съвкупността на всички елементи на разделянето τ, чиито затворени обвивки не се пресичат с множеството E, т. е.

$$\tau(E) = \{G_i : \ G_i \in \tau, \ [G_i] \cap E = \varnothing\}. \tag{5.4.5}$$

За всяка функция f, дефинирана върху $[G]$, да означим

$$\sigma_{\tau(E)}(f) := \sum_{G_i \in \tau(E)} f(\xi^{(i)})\mu(G_i), \quad \xi^{(i)} \in [G_i]. \tag{5.4.6}$$

Този запис означава, че сумирането в дясната страна на (5.4.6) се извършва само по тези индекси i, за които $G_i \in \tau(E)$. Съответно, обичайната риманова интегрална сума е

$$\sigma_\tau(f) := \sum_{G_i \in \tau} f(\xi^{(i)})\mu(G_i), \quad \xi^{(i)} \in [G_i]. \tag{5.4.7}$$

Теорема 5.4.4 *Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е отворено и измеримо множество, $E \subset [G]$ и $\mu(E) = 0$. Нека функцията $f : [G] \longrightarrow \mathbb{R}$ е ограничена в множеството $[G]$. Тогава границата*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = \int f(x)\mathrm{d}G \tag{5.4.8}$$

съществува тогава и само тогава, когато съществува границата

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_{\tau(E)}(f).$$

При това, ако последната граница съществува, то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_{\tau(E)}(f) = \int f(x)\mathrm{d}G. \tag{5.4.9}$$

Забележка 5.4.2 *От Теорема 5.4.4 следва, че ако функцията $f : [G] \longrightarrow \mathbb{R}$ е ограничена върху затворената обвивка $[G]$ на отвореното множество G, то изменението на нейните стойности върху множество $E \subset [G]$ с мярка нула, в резултат на което отново се получава ограничена върху $[G]$ функция, не влияе нито на интегруемостта на функцията f, нито на стойността на интеграла, ако той съществува. Това веднага следва от факта, че при такова изменение сумата $\sigma_{\tau(E)}(f)$ (дадена с формулата (5.4.6)) остава непроменена, а по теорема 5.4.4, нейната граница (ако съществува), удовлетворява формулата (5.4.9).*

И така, интегруемостта и стойността на интеграла от дадена функция не зависи от стойностите на функцията върху контура на отвореното измеримо множество (като множество с мярка нула), стига функцията да е ограничена там. Поради това, по-нататък при изучаване свойствата на интегралите, за простота на формулировките често се предполага, че разглежданите функции са дефинирани върху отворено измеримо множество, а не върху затворената му обвивка. Тогава

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu(G_i), \quad \xi^{(i)} \in [G_i] \cap G,$$

с единствената разлика, че $\xi^{(i)}$ се разглежда $\xi^{(i)} \in [G_i] \cap G$, вместо $\xi^{(i)} \in [G_i]$. По такъв начин тук става дума не за някакво ново понятие, а само за несъществена модификация на дефиницията на интеграл като граница на интегрални суми.

5.5 Свойства на многократните интеграли

За краткост в по-нататъшното изложение, за класа на функциите, интегруеми в риманов смисъл в дадено отворено и измеримо множество G, е използвано означението $\Re(G)$. Нека сега $G \subset \mathbb{R}^m$ и G е измеримо множество. Нека освен това $f, g : [G] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \Re(G)$, а λ и μ са произволни реални константи. В няколко теореми по-долу са дадени основни свойства на интегралите, отнасящи се до така описаните функции и множества.

Теорема 5.5.1 *В сила са следните свойства на многократните интеграли:*
1) $\int \mathrm{d}G = \int 1\mathrm{d}G = \mu(G)$,
2) $\int (\lambda f + \mu g)\mathrm{d}G = \lambda \int f\mathrm{d}G + \mu \int g\mathrm{d}G$ *(линейност на интеграла).*
В частност
а) ако $\lambda = \mu = 1 \Rightarrow \int (f + g)\mathrm{d}G = \int f\mathrm{d}G + \int g\mathrm{d}G$,
б) ако $\lambda = 1, \mu = -1 \Rightarrow \int (f - g)\mathrm{d}G = \int f\mathrm{d}G - \int g\mathrm{d}G$,
в) ако $\lambda = const$, $\mu = 0 \Rightarrow \int \lambda f\mathrm{d}G = \lambda \int f\mathrm{d}G$,
3) ако $f \geqq 0$ *върху* $G \Rightarrow \int f\mathrm{d}G \geqq 0$.

Доказателството на тези три свойста се извършва с непосредствено използване на съответните риманови интегрални суми.

Следствие 5.5.1.1 *Ако* $f \geq g$ *върху* G, *то* $\int f\mathrm{d}G \geq \int g\mathrm{d}G$.

Теорема 5.5.2 *Ако $G^{'} \subset G$ е измеримо множество, то $f \in \Re(G^{'})$.*

Доказателство. Нека $G' \neq G$ (ако $G' = G$, твърдението е тривиално). Тогава множеството $G'' = G \setminus [G']$ не е празно и също е отворено и кубируемо множество. Нека $\tau' = \{G_i'\}$ и $\tau'' = \left\{G_j''\right\}$ са разделяния съответно на отворените и измерими множества G' и G'', а $\delta_{\tau'}$, $\delta_{\tau''}$ са техните диаметри, като при това $\delta_{\tau''} \leq \delta_{\tau'}$. Тогава $\tau = \left\{G_i', G_j''\right\}$ е разделяне на множеството G с диаметър $\delta_\tau = \delta_{\tau'}$. Ако

$$\omega_\tau := \sum_i \omega(f, G_i')\, \mu(G_i') + \sum_j \omega(f, G_j'')\, \mu(G_j'')$$

и

$$\omega_{\tau'} := \sum_i \omega(f, G_i')\, \mu(G_i'),$$

то е очевидно, че $\omega_{\tau'} \leq \omega_\tau$.

Тъй като

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \omega_\tau = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{\delta_\tau' \to 0} \omega_{\tau'} = 0,$$

откъдето следва интегруемостта на функцията f върху множеството G'. $\square$

Теорема 5.5.3 (адитивност относно множествата) *Ако G' и G'' са измерими множества, $[G] = [G'] \cup [G'']$ и $G' \cap G'' = \varnothing$, $\Rightarrow$*

$$\int f \mathrm{d}G = \int f \mathrm{d}(G' \cup G'') = \int f \mathrm{d}G' + \int f \mathrm{d}G''. \tag{5.5.1}$$

Доказателство. Наистина, съгласно предното свойство, интегралите $\int f\mathrm{d}G'$ и $\int f\mathrm{d}G''$ съществуват. Нека $\tau' = \{G_i'\}$ и $\tau'' = \left\{G_j''\right\}$ са разделяния съответно на множествата G' и G'', тогава $\tau = \left\{G_i', G_j''\right\}$ е разделяне на множеството G, а

$$\delta_\tau = \max\{\delta_{\tau'}, \delta_{\tau''}\}$$

е неговият диаметър. Нека

$$\xi_i \in [G_i'], \quad \eta_j \in [G_j''],$$

$$\sigma_{\tau'} := \sum_i f(\xi_i)\, \mu(G_i'), \quad \sigma_{\tau''} := \sum_j f(\xi_j)\, \mu(G_j''),$$

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau'} + \sigma_{\tau''}. \tag{5.5.2}$$

Поради интегруемостта на f върху множествата G', G'' и G е изпълнено

$$\lim_{\delta'_\tau \to 0} \sigma_{\tau'} = \int f \mathrm{d}G', \quad \lim_{\delta''_\tau \to 0} \sigma_{\tau''} = \int f \mathrm{d}G'', \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int f \mathrm{d}G,$$

поради което, преминавайки към граница в (5.5.2) при $\delta_\tau \to 0$, равенството (5.5.1) автоматично следва. $\square$

Следствие 5.5.3.1 (монотонност на интеграла) *Ако $\Gamma \subset G$ е измеримо множество и $f \geq 0$ върху G, то*

$$\int f \mathrm{d}G \geq \int f \mathrm{d}\Gamma.$$

Теорема 5.5.4 *Произведението $f.g \in \Re(G)$.*

Доказателство. Тъй като $f, g \in \Re(G)$, то те са ограничени в $[G]$, т.е. съществуват такива константи $M > 0$, $N > 0$, че

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq N$$

за всички $x \in [G]$. Поради това тяхното произведение $f(x)g(x)$ също е ограничено там, т.е. за всички $x \in [G]$ е изпълнено неравенството

$$|f(x)g(x)| \leq MN.$$

Нека $\tau = \{G_i\}$ е разделяне на множеството G. Оценявайки израза

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x'),$$

добавяме и изваждаме $f(x')g(x'')$, откъдето

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = (f(x'') - f(x'))\, g(x'') + (g(x'') - g(x'))\, f(x'). \tag{5.5.3}$$

От (5.5.3) следва, че за точките $x', x'' \in [G_i]$ е изпълнено

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq N\omega_i(f) + M\omega_i(g), \tag{5.5.4}$$

където $\omega_i(f), \omega_i(g)$ са осцилациите на функциите f и g в множеството $[G_i]$.

От неравенството (5.5.4) имаме, че осцилацията $\omega_i(fg)$ в множеството $[G_i]$ се оценява по следния начин

$$\omega_i(fg) \le N\omega_i(f) + M\omega_i(g),$$

откъдето:

$$S_\tau(fg) - s_\tau(fg) = \sum_i \omega_i(fg)\,\mu(G_i) \le$$

$$\le N\sum_i \omega_i(f)\,\mu(G_i) + M\sum_i \omega_i(g)\,\mu(G_i),$$

т. е.

$$S_\tau(fg) - s_\tau(fg) \le N(S_\tau(f) - s_\tau(f)) + M(S_\tau(g) - s_\tau(g)). \tag{5.5.5}$$

От интегруемостта на f и g следва, че

$$\lim_{\delta_\tau\to 0} |S_\tau(f) - s_\tau(f)| = \lim_{\delta_\tau\to 0} |S_\tau(g) - s_\tau(g)| = 0,$$

поради което (5.5.5) дава

$$\lim_{\delta_\tau\to 0} (S_\tau(fg) - s_\tau(fg)) = 0,$$

а последното автоматично влече интегруемостта на fg. □

Теорема 5.5.5 *Функцията $|f| \in \Re(G)$, и освен това е изпълнено неравенството $|\int f\mathrm{d}G| \leqq \int |f|\mathrm{d}G$.*

И в този случай доказателството се извършва аналогично на едномерния случай.

5.6 Свеждане на кратните интеграли до повторни

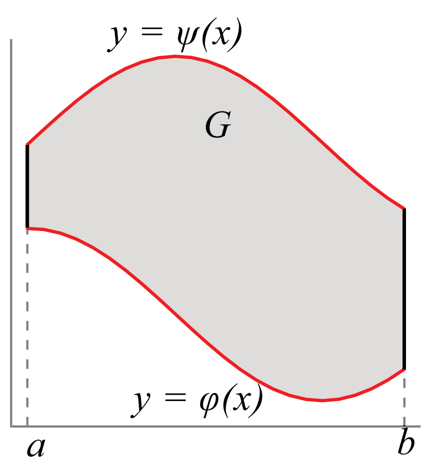
Преминаваме към изучаване на методите за пресмятане на многократни интеграли в измеримо множество в $\mathbb{R}^m$. Пресмятането на такъв интеграл се свежда до последователно пресмятане на m еднократни интеграла. Изложението върви аналогично за всяка стойност на m, но за по-голяма яснота започваме със случая $m = 2$.

5.6.1 Двумерен случай

Нека в равнината $\mathbb{R}^2$ е фиксирана правоъгълна координатна система с координати x и y.

Дефиниция 5.6.1 *Нека $G \subset \mathbb{R}^2$. G се нарича елементарна област относно Oy, ако ∂G се състои от графиките на две непрекъснати функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, дефинирани върху някакъв интервал $[a, b]$ и $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ за $x \in [a, b]$, и може да съдържа и отсечки от правите $x = a$ и $x = b$. Аналогично се дефинира област, елементарна относно Ox.*

На фигурата по-долу е показана област, елементарна относно Oy.



Фигура 5.6.1: $G \subset \mathbb{R}^2$ – елементарна относно Oy

Теорема 5.6.1 (Теорема на Фубини) *Нека G е елементарна фигура относно Oy, $G \subset \mathbb{R}^2$, ∂G, границата на G, се състои от графиките на непрекъснатите функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ за всяко $x \in [a, b]$ и евентуално от отсечки от правите $x = a$, $x = b$. Нека $f : [G] \longrightarrow \mathbb{R}$ и f е непрекъсната върху $[G]$. Тогава*

$$\iint_G f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{5.6.1}$$

Дефиниция 5.6.2 *Интегралът, който се намира в дясната страна на формула* (5.6.1) *се нарича повторен и обикновено се записва във вида*

$$\int_{a}^{b} \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Преди да преминем към доказателството на Теорема 5.6.1, ще формулираме и докажем следната лема.

Лема 5.6.1 *При предположенията на Теорема 5.6.1, функцията*

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \tag{5.6.2}$$

е непрекъсната функция на x в интервала $[a,b]$.

Доказателство. Поради непрекъснатостта на f върху затвореното и ограничено (т.е. компактно) множество $[G]$, тя е ограничена върху $[G]$, т.е. съществува такава константа $M > 0$, че

$$|f(x)| \leq M, \quad (x,y) \in [G].$$

Нека сега x и $x + \Delta x$ са фиксирани и x, $x + \Delta x \in [a,b]$. Нека освен това

$$\Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad \Delta\psi = \psi(x + \Delta x) - \psi(x),$$

и за определеност

$$\psi(x) - \varphi(x) \geq \Delta\varphi \geq 0, \quad \Delta\psi \geq 0,$$

тогава

$$| F(x + \Delta x) - F(x) | = \left| \int_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)+\Delta\psi} f(x + \Delta x, y)\mathrm{d}y - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right| =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int\limits_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)} f(x+\Delta x, y)\mathrm{d}y + \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x)+\Delta\psi} f(x+\Delta x, y)\mathrm{d}y - \right. \\
&\qquad \left. - \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(x)+\Delta\varphi} f(x,y)\mathrm{d}y - \int\limits_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right| \leq \\
&\qquad \leq \int\limits_{\varphi(x)+\Delta\varphi}^{\psi(x)} |f(x+\Delta x, y) - f(x,y)|\mathrm{d}y + \\
&\qquad + \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(x)+\Delta\varphi} |f(x,y)|\mathrm{d}y + \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x)+\Delta\psi} |f(x+\Delta x, y)|\mathrm{d}y. \qquad (5.6.3)
\end{aligned}
$$

Границите на интегриране са подбрани така, че подинтегралните функции да са дефинирани в съответните интервали, в които се извършва интегрирането.

Означавайки с $\omega(\delta; f)$ модула на непрекъснатост на функцията f върху множеството $[G]$, получаваме

$$
\begin{aligned}
&\mid F(x+\Delta x) - F(x) \mid \leq \omega(\Delta x; f)[\psi(x) - \varphi(x) - \Delta\varphi] + M\Delta\varphi + M\Delta\psi \leq \\
&\qquad \leq \omega(\Delta x; f) \sup_{x\in[a,b]} [\psi(x) - \varphi(x)] + M\Delta\varphi + M\Delta\psi. \qquad (5.6.4)
\end{aligned}
$$

Поради непрекъснатостта на функциите φ и ψ, разликата $\psi(x) - \varphi(x)$ е ограничена и

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta\varphi = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta\psi = 0.$$

По-нататък, поради непрекъснатостта на f върху ограниченото и затворено множество $[G]$, тя е и равномерно непрекъсната там, и следователно

$$\lim_{\Delta x\to 0} \omega(\Delta x; f) = 0.$$

Тогава поради (5.6.4) следва, че

$$\lim_{\Delta x\to 0} \mid F(x+\Delta x) - F(x) \mid = 0, \qquad (5.6.5)$$

което означава, че функцията F е непрекъсната в точката x.

В случай, че $\Delta\varphi \geq 0, \Delta\psi \leq 0$ или $\Delta\varphi \leq 0, \Delta\psi \geq 0$, или $\Delta\varphi \leq 0, \Delta\psi \leq 0$, доказателството на лемата се извършва аналогично, като границите на интегриране трябва да бъдат взети подходящо. Във всички тези случаи се получава аналогично неравенство, което следва от (5.6.3), след заместване на $\Delta\varphi$ и $\Delta\psi$ съответно с $|\Delta\varphi|$ и $|\Delta\psi|$, откъдето очевидно следва верността на (5.6.5). □

Доказателство на Теорема 5.6.1. Преди всичко да отбележим, че интегралът, който се намира в дясната страна на равенството (5.6.1), т.е. интегралът

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

съществува, тъй като съгласно току-що доказаната лема представлява интеграл от непрекъсната функция.

Да разделим сега областта G на части $G_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, както следва. Вземаме разделянето $\tau_k = \{x_i\}_{i=0}^k$, където

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b, \quad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k},$$

с което интервалът $[a, b]$ се разделя на k равни части. Нека

$$\begin{gathered}
\varphi_0(x) = \varphi(x), \\
\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{1}{k}[\psi(x) - \varphi(x)], \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{j}{k}[\psi(x) - \varphi(x)], \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\varphi_k(x) = \varphi(x) + \frac{k}{k}[\psi(x) - \varphi(x)] = \psi(x),
\end{gathered}$$

и да означим

$$\begin{gathered}
\tau_k^* = \{G_{i,j}\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k, \\
G_{i,j} = \{(x, y) : \ x_{i-1} < x < x_i, \ \varphi_{j-1}(x) < y < \varphi_j(x)\},
\end{gathered}$$

което очевидно е разделяне на G. Сега имаме

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{d}x \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\mathrm{d}y =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{5.6.6}$$

По-нататък, ако

$$m_{i,j} = \inf_{[G_{i,j}]} f(x,y), \quad M_{i,j} = \sup_{[G_{i,j}]} f(x,y), \quad i,j = 1,2,\dots,k,$$

то

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \le M_{i,j} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} \mathrm{d}y =$$

$$= M_{i,j} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)\right) \mathrm{d}x = M_{i,j}\, \mu(G_{i,j}) \tag{5.6.7}$$

и аналогично

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \ge m_{i,j}\, \mu(G_{i,j}). \tag{5.6.8}$$

С помощта на неравенствата (5.6.7) и (5.6.8) получаваме следната оценка на интеграла (5.6.6), изразена с малките и големите суми на Дарбу за функцията $f(x,y)$

$$s_{\tau_k^*} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} m_{i,j}\, \mu(G_{i,j}) \le \int\limits_{a}^{b} \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \le \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} M_{i,j}\, \mu(G_{i,j}) = S_{\tau_k^*}. \tag{5.6.9}$$

За диаметъра $\delta_{\tau_k^*}$ на разделянето τ_k^* на областта G е изпълнено

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{\tau_k^*} = 0,$$

и тогава поради интегруемостта на функцията $f(x,y)$ върху множеството G следва, че

$$\lim_{k\to\infty} s_{\tau_k^*} = \lim_{k\to\infty} S_{\tau_k^*} = \iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

откъдето (5.6.1) автоматично следва, ако в (5.6.9) оставим k да клони към безкрайност. □

Ако сега областта G е елементарна относно оста Ox и границата ѝ се състои от графиките на непрекъснатите функции $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\alpha(y) \leq \beta(y)$, $c \leq y \leq d$ и евентуално отсечки от правите $y = c$ и $y = d$, а функцията $f(x, y)$, както и по-рано е непрекъсната върху компактното множество $[G]$, то е в сила формулата

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{c}^{d} \mathrm{d}y \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{5.6.10}$$

Ако областта G е елементарна както спрямо оста Ox, така и спрямо Oy, то приравнявайки десните части на (5.6.1) и (5.6.10), получаваме следното равенство за непрекъсната върху G функция $f(x, y)$

$$\int\limits_{a}^{b} \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{c}^{d} \mathrm{d}y \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x, \tag{5.6.11}$$

което изразява правило за смяна на реда на интегриране в повторните интеграли.

Пример 5.6.1 *Тук е пресметнат интегралът от функцията $z = x^2y$ върху ограничената област G, заградена от частта на параболата $y = x^2$ и правата $y = 1$.*

Имаме

$$\iint\limits_{G} x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^{1} y\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\bigg|_{y=x^2}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} (1 - x^4)x^2\mathrm{d}x = \frac{4}{21},$$

което е стойността на дадения интеграл. □

Забележка 5.6.1 *Условието за непрекъснатост на подинтегралната функция е съществено.*

За илюстрация е разгледана функцията от Пример 2.3.3, дефинирана върху квадрата $D = \{(x, y)\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, която е непрекъсната функция в целия квадрат (както е показано в примера) с изключение на точките от неговия диагонал, където е прекъсната.

Пример 5.6.2 *Нека A и B са множествата $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 1, y > x\}$ и $B = \{(x, y) : x \leq 1, y \geq 0, y < x\}$, изобразени на Фиг. 2.3.1 и функцията $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ е зададена както следва*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & (x, y) \in A, \\ 0, & x = y, \\ -\dfrac{1}{x^2}, & (x, y) \in B. \end{cases}$$

По-надолу са пресметнати двата повторни интеграла

$$I_1 = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y, \quad I_2 = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x,$$

и е установено, че резултатът зависи от реда на интегриране.

За интеграла I_1 се получава последователно

$$I_1 = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x f(x, y)\mathrm{d}y + \int\limits_x^1 f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x \frac{-1}{x^2}\mathrm{d}y + \int\limits_x^1 \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{-x}{x^2} + \frac{y^{-1}}{-1}\Bigg|_{y=x}^{1} \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 \mathrm{d}x = -1.$$

Аналогично, за интеграла I_2 имаме

$$I_2 = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \left(\int\limits_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x \right) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^y f(x, y)\mathrm{d}x + \int\limits_y^1 f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{y}{y^2} - \frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_{x=y}^{1} \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y} \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y = 1,$$

което показва, че резултатът зависи от реда на интегриране. □

Ако се изисква да се пресметне интеграл върху област, която не е елементарна нито относно оста Ox, нито относно Oy, то за да се приложат получените формули, е нужно да се раздели дадената област на части, всяка от които е елементарна поне относно една от координатните оси. Ако това е възможно да бъде направено, по силата на адитивността на интеграла относно множествата, пресмятането на двойния интеграл се свежда до пресмятане на интегралите върху получените части, а последните се свеждат до повторни, съгласно формулите (5.6.1) и (5.6.10).

5.6.2 Обобщение за $m-$мерния случай

Нека областта $G \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^{m-1}$ е хиперравнината $x_m = 0$, а G_{x_m} е нейната проекция върху хиперравнината $\mathbb{R}^{m-1}$, т.е. $G_{x_m} = \text{пр}_{\,\mathbb{R}^{m-1}} G$. С други думи,

$$G_{x_m} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) : \exists x_m, (x_1, x_2, \cdots \ldots, x_m) \in G \right\}.$$

Дефиниция 5.6.3 *Областта G се нарича елементарна относно оста x_m, ако нейната проекция G_{x_m} е кубируема (измерима), а границата ѝ се състои от графиките на две функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_{m-1})$ и $\psi(x_1, x_2, \ldots x_{m-1})$, непрекъснати върху множеството $[G_{x_m}]$, такива, че $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_{m-1}) \leqq \psi(x_1, x_2, \ldots x_{m-1})$, $(x_1, x_2, \ldots x_{m-1}) \in [G_{x_m}]$ и евентуално част от цилиндър с основа границата ∂G_{x_m} на областта G_{x_m}.*

Да отбележим, че ако областта G е елементарна относно оста x_m, то тя е измерима. Наистина, нейната проекция G_{x_m} е кубируема област, и следователно е ограничена (по дефиниция). Поради това, границата на областта G, която се състои от графиките на непрекъснати функции върху компактното множество $[G_{x_m}]$ и евентуално част от цилиндър с основа, която има мярка нула ($\mu(\partial G_{x_m}) = 0$, поради кубируемостта на G_{x_m}), също има мярка нула.

Да отбележим, че ако $f : [G] \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната, теоремата на Фубини се обобщава и е валидна следната формула

$$\int \cdots \int\limits_G f(x_1, x_2, \ldots x_m) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_m =$$

$$= \int_{G_{x_m}} \cdots \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_{m-1} \int\limits_{\varphi(x_1,x_2,\ldots x_{m-1})}^{\psi(x_1,x_2,\ldots x_{m-1})} f(x_1, x_2, \ldots x_m)\mathrm{d}x_m.$$

Пример 5.6.3 *За илюстрация е пресметнат интегралът* $\iiint\limits_T xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ *по ограничена област* T*, заградена от повърхнините с уравнения*

$$z = xy, \; y = x, \; x = 1, \; z = 0.$$

Имаме

$$\iiint\limits_T xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 x\mathrm{d}x \int\limits_0^x y^2\mathrm{d}y \int\limits_0^{xy} z^3\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^5\mathrm{d}x \int\limits_0^x y^6\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 x^{12}\mathrm{d}x = \frac{1}{364}. \qquad \square$$

5.7 Приложение на многократните интеграли в геометрията

Нека $G \subset \mathbb{R}^m$ е измеримо (кубируемо) множество. Както е известно от Теорема 5.5.1, мярката на G се изразява с формулата по-долу

$$\mu(G) = \int dG. \tag{5.7.1}$$

По такъв начин посредством m-кратен интеграл може да се пресметне мярката на кубируемо множество в m-мерното пространство (т.е. лицето – в двумерното пространство и обемът – в тримерното). Ако m-кратният интеграл може да се сведе до повторен, то пресмятането на мярката на кубируемо множество G се свежда до пресмятане на $(m-1)$-кратен интеграл.

И така, ако $m = 2$, площта на измеримата равнинна област $D \subset \mathbb{R}^2$ се пресмята по формулата

$$S(D) = \mu(D) = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5.7.2}$$

а ако $m = 3$, обемът на измеримата пространствена област $T \subset \mathbb{R}^3$ се пресмята по формулата

$$V(T) = \mu(T) = \iiint\limits_T \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{5.7.3}$$

които са пряко приложение на формулата (5.7.1). Ако освен това интегралът (5.7.3) може да се сведе до повторен, и D е проекция на тялото T върху $\mathbb{R}^2$ (примерно върху равнината xOy), а T е разположено между повърхнините $z = f_1(x,y)$ и $z = f_2(x,y)$, като е изпълнено неравенството $f_1(x,y) \le f_2(x,y)$ при $(x,y) \in D$, формулата за обем може да се запише и във вида

$$V(T) = \mu(T) = \iint\limits_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5.7.4}$$

Друга полезна формула е тази, за намиране лице на част от повърхнина, заключена в цилиндрична повърхнина. С други думи, ако $D \subset \mathbb{R}^2$ е квадрируема област и повърхнината S е дефинирана в затвореното множество $[D]$, т.е.

$$S : z = f(x,y), \quad \text{където} \quad f : [D] \longrightarrow \mathbb{R},$$

като при това f е непрекъснато диференцируема в D, то лицето на тази повърхнина се дава с формулата

$$\sigma = \sigma(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5.7.5}$$

За илюстрация на формулата (5.7.5) е разгледан следващият пример.

Пример 5.7.1 *Да се пресметне лицето на частта от повърхнината $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, разположена във вътрешността на цилиндричната повърхнина с уравнение $x^2 + y^2 = 2x$.*

Да отбележим, че областта D в този пример е отвореният кръг с център точката $(1,0)$ и радиус 1, тъй като $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$. Освен това

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2}.$$

Тогава формулата (5.7.5) дава

$$\sigma = \sigma(S) = \iint\limits_D \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mu(D) = \sqrt{2}\,\pi. \qquad \square$$

5.8 Матрицата на Якоби и якобиан на изображение

Нека $x \in D \subset \mathbb{R}^m$ и $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. $y \in \mathbb{R}^n$ се задава със системата функции

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots x_m), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots x_m), \\ \qquad \dots, \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots x_m). \end{cases} \tag{5.8.1}$$

Дефиниция 5.8.1 *Нека в точката $x^0 \in D$ съществуват първите частни производни на функциите f_i $(i = 1 \div m)$ от (5.8.1), тогава матрицата от всички тези частни производни в точката x^0*

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{Vmatrix} \tag{5.8.2}$$

се нарича матрица на Якоби за изображението $f(x)$.

В случая $m = n$ може да се пресметне детерминантата $J(x_1, x_2, \dots x_m)$ на матрицата на Якоби (5.8.2)

$$J(f;\, x_1, x_2, \dots x_m) = \frac{D(y_1, y_2, \dots y_m)}{D(x_1, x_2, \dots x_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}. \tag{5.8.3}$$

Дефиниция 5.8.2 *Детерминантата* (5.8.3) *се нарича още якобиан на изображението* $f(x)$ *(означава се кратко с* $J(x_1, x_2, \dots x_m)$*, а понякога просто с* $J(f)$*).*

Да отбележим, че якобианът на система от функции възниква по естествен начин при изучаване на различни въпроси от теорията на функциите на много променливи. Поради тази причина по-долу са дадени някои от основните му свойства, които могат да се намерят напр. в Кудрявцев [3, Гл. 5, §41], но поради ограничения брой страници, доказателствата им тук са пропуснати. Преди да преминем към техните формулировки, да дадем следната дефиниция.

Дефиниция 5.8.3 *Изображението* $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $(G \subset \mathbb{R}^m)$*, дадено с* (5.8.1)*, се нарича непрекъснато диференцируемо изображение, ако всички първи частни производни на* f_i $(i = 1 \div m)$ *съществуват в* G *и са непрекъснати там.*

Теорема 5.8.1 *Нека*

$$y = f(x) = \{y_i = f_i(x_1, x_2, \dots x_m),\ i = 1 \div m\}$$

е взаимно еднозначно непрекъснато диференцируемо изображение от отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^m$ *върху отвореното множество* $\widetilde{G} \subset \mathbb{R}^m$*. Нека освен това и обратното изображение*

$$x = f^{-1}(y) = \{x_i = f_i^{-1}(y_1, y_2, \dots y_m),\ i = 1 \div m\}$$

(което също е еднозначно) е непрекъснато диференцируемо в своето дифеницинно множество $\widetilde{G}$*. Тогава е в сила формулата*

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots y_m)}{D(x_1, x_2, \dots x_m)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \dots x_m)}{D(y_1, y_2, \dots y_m)} = 1.$$

Тази формула може да се запише във вида

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots x_m)}{D(y_1, y_2, \dots y_m)} = \frac{1}{\dfrac{D(y_1, y_2, \dots y_m)}{D(x_1, x_2, \dots x_m)}}, \qquad (5.8.4)$$

т.е. якобианът на изображението, което е обратно на дадено изображение, е равен на реципрочната стойност на якобиана на даденото изображение.

Забележка 5.8.1 *Да отбележим, че нито един от двата якобиана не става равен на нула, защото тяхното произведение е равно на* 1.

Забележка 5.8.2 *В едномерния случай* ($m = 1$) *формулата* (5.8.4) *се свежда до добре известната формула за производна на обратна функция*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}},$$

поради което (5.8.4) *е нейно обобщение.*

Да разгледаме въпроса за съществуване на изображение, обратно на дадено. В едномерния случай ($m = 1$), ако $f(x)$ е непрекъснато диференцируема функция в даден интервал и $f'(x) \neq 0$, то $f(x)$ е строго монотонна, следователно съществува единствена обратна функция. При $m > 1$ нещата се усложняват и отговор на въпроса има само локално. По-точно, в сила е следната теорема.

Теорема 5.8.2 *Нека* $G \subset \mathbb{R}^m$ *е отворено множество,* $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots x_m) \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots x_m) \end{cases}$$

е непрекъснато диференцируемо изображение и нека точката $x^{(0)} \in G$, *а* $y^{(0)} = f\left(x^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^m$. *Ако освен това, якобианът на това изображение е различен от нула в точката* $x^{(0)}$, *то съществуват такива околности* $U_{x^{(0)}}$ *и* $U_{y^{(0)}}$ *съответно на точките* $x^{(0)}$ *и* $y^{(0)}$, *че изображението* f *е взаимно еднозначно изображение от* $U_{x^{(0)}}$ *върху* $U_{y^{(0)}}$, *т.е.* $f : U_{x^{(0)}} \longrightarrow U_{y^{(0)}}$, *и обратното му изображение е непрекъснато диференцируемо в множеството* $U_{y^{(0)}}$.

Следствие 5.8.2.1 *Нека* $G \subset \mathbb{R}^m$ *е отворено множество и* $F : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *е непрекъснато диференцируемо в* G, *а якобианът* $J(F)$ *е различен от нула върху* G. *Тогава* $F(G)$ *също е отворено множество.*

Теорема 5.8.3 (Принцип за запазване на областта) *Образът на* m*-мерна област (отворено и свързано множество) в* m*-мерното пространство при непрекъснато диференцируемо изображение с ненулев якобиан е област, т.е. ако:*

1) $G \subset \mathbb{R}^m$ е област,

2) $F : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е непрекъснато диференцируемо изображение,

3) $J(F) \neq 0$ върху G,

то $F(G)$ също е област.

По-нататък е разгледан въпросът за геометричния смисъл на модула на якобиана. За по-голяма яснота това е направено първо в пространството $\mathbb{R}^2$. За целта, нека $G,\ G^* \subset \mathbb{R}^2$ са отворени множества и изображението $F : G \longrightarrow G^*$, като F е зададена с двойката функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{5.8.5}$$

и предполагаме, че изображението F удовлетворява следните условия:

1) Изображението F е взаимно еднозначно изображение от G върху G^*,

2) Изображението F е непрекъснато диференцируемо върху G,

3) Якобианът $J(u, v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ върху G.

Да отбележим още веднъж, че изображението F^{-1}, което е обратно на F, също е непрекъснато диференцируемо взаимно еднозначно изображение и якобианът му е различен от нула върху G^*.

Лема 5.8.1 *Ако $\gamma \subset G$ е по части гладка крива, то и нейният образ $\gamma^* = F(\gamma)$ също е по части гладка крива.*

Забележка 5.8.3 *Ако $\gamma \subset G$ е прост затворен контур, то поради взаимната еднозначност на F, неговият образ $\gamma^* = F(\gamma)$ също е прост затворен контур.*

Лема 5.8.2 *Ако Γ е отворено и ограничено множество и $[\Gamma] \subset G$, тогава $\Gamma^* = F(\Gamma)$ също е отворено и ограничено множество и*

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial\Gamma). \tag{5.8.6}$$

Ако освен това $\partial\Gamma$ се състои от краен брой по части гладки криви, то отворените множества Γ и $F(\Gamma)$ са квадрируеми.

Нека сега $(u_0, v_0) \in G$ и $h \in \mathbb{R}$ е реално число, и да разгледаме затворения квадрат S с върхове в точките

$$(u_0, v_0),\ (u_0 + h, v_0),\ (u_0 + h, v_0 + h),\ (u_0, v_0 + h). \tag{5.8.7}$$

Нека $S \subset G$ (за "достатъчно малки" h това включване винаги се изпълнява). Границата ∂S на квадрата S, която се състои от четирите му страни, очевидно е прост затворен по части гладък контур. Поради Лема 5.8.2 множеството $S^* = F(S)$ е затворена квадрируема област (фактът, че S^* е затворена област, следва от принципа за запазване на областта, виж Теорема 5.8.3). В сила е следната теорема.

Теорема 5.8.4 *Нека изображението F от отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^2$ върху отвореното множество $G^* \subset \mathbb{R}^2$ е взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо върху G и нека якобианът му $J(u, v) \neq 0$ върху G. Тогава, ако S е квадрат с върхове* (5.8.7), *то*

$$\frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(u_0, v_0)| + \varepsilon(u_0, v_0, h), \tag{5.8.8}$$

където функцията $\varepsilon = \varepsilon(u_0, v_0, h)$ клони към нула, когато $h \to 0$. При това сходимостта е равномерна относно (u_0, v_0), върху всяко затворено и ограничено множество $A \subset G$, за което $(u_0, v_0) \in A$.

Следствие 5.8.4.1 *За всяка точка (u_0, v_0) на отвореното множество G е изпълнено равенството*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(u_0, v_0)|. \tag{5.8.9}$$

В общия случай на m-мерно пространство тази теорема се обобщава по следния начин.

Теорема 5.8.5 *Нека множествата G, $G^* \subset \mathbb{R}^m$ са отворени множества и изображението $F : G \longrightarrow G^*$ е зададено с m-торката функции*

$$x = F(t) = \{x_i = x_i(t_1, \ldots, t_m),\ i = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{5.8.10}$$

Нека F е взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо върху G и якобианът му

$$J(t) = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_m)}{\partial(t_1, \ldots, t_m)} \neq 0, \quad t \in G,$$

а S е m-мерният куб

$$S = \{t :\ t_i^0 \le t_i \le t_i^0 + h,\ i = 1, 2, \ldots, m\} \subset G,\ t^0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0).$$

Тогава

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(t^0)|, \tag{5.8.11}$$

при това, ако

$$\frac{\mu(F(S))}{\mu(S)} = |J(t^0)| + \varepsilon(t^0, h), \tag{5.8.12}$$

то за всяко ограничено и затворено множество $A \subset G$, функцията $\varepsilon = \varepsilon(t^0, h)$, дефинирана за $t^0 \in A$, клони равномерно към нула върху множеството A, при $h \to 0$.

За пълнота, само да отбележим, че ако $G,\ G^* \subset \mathbb{R}^3$ са отворени множества, изображението $F : G \longrightarrow G^*$ е зададено с тройката функции:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \tag{5.8.13}$$

и F удовлетворява същите условия, както по-горе, тогава могат да се запишат следните модификации на Лема 5.8.1 и 5.8.2.

Лема 5.8.3 *Ако $S \subset G$ е по части гладка повърхнина в $\mathbb{R}^3$, то и нейният образ $S^* = F(S)$ също е по части гладка повърхнина.*

Забележка 5.8.4 *Ако $S \subset G$ е проста затворена повърхнина, то поради взаимната еднозначност на F, нейният образ $S^* = F(S)$ също е проста затворена повърхнина.*

Лема 5.8.4 *Ако Γ е отворено и ограничено множество и $[\Gamma] \subset G$, тогава $\Gamma^* = F(\Gamma)$ също е отворено и ограничено множество и*

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial \Gamma). \tag{5.8.14}$$

Ако освен това $\partial\Gamma$ се състои от краен брой по части гладки повърхнини, то отворените множества Γ и $F(\Gamma)$ са измерими.

5.9 Смяна на променливите в многократен интеграл

За удобство, в началото са запазени означенията и предположенията от предния параграф, т.е. предполага се, че F е непрекъснато диференцируемо изображение от отвореното множество $G \subset \mathbb{R}^2$ върху отвореното множество $G^* \subset \mathbb{R}^2$ с якобиан, различен от нула в G. Нека Γ и Γ^* са квадрируеми (и следователно ограничени) отворени множества, $[\Gamma] \subset G$, $[\Gamma^*] \subset G^*$, и нека $F([\Gamma]) = [\Gamma^*]$. Тогава F изобразява вътрешните точки на Γ във вътрешните точки на Γ^*, а контура $\partial\Gamma$ – в контура $\partial\Gamma^*$.

Теорема 5.9.1 (за смяна на променливите в двукратен интеграл) *Нека функцията*

$$f : [\Gamma^*] \longrightarrow \mathbb{R}$$

е непрекъсната върху $[\Gamma^*]$. *Тогава е в сила формулата*

$$\iint\limits_{\Gamma^*} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Gamma} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad (5.9.1)$$

Верността на (5.9.1) остава в сила и при малко по-общия случай, когато якобианът на изображението F става нула върху границата на областта на интегриране, а самото изображение не е взаимно еднозначно върху тази граница. По-точно, в сила е следната теорема.

Теорема 5.9.2 *Нека* G, $G^* \subset \mathbb{R}^2$ *са отворени измерими множества и*

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v)$$

е непрекъснато изображение от $[G]$ *върху* $[G^*]$, *което е взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо изображение от* G *върху* G^*. *Нека якобианът на това изображение*

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

е различен от нула в G *и непрекъснато продължим върху* $[G]$. *Нека освен това функцията*

$$f : [G^*] \longrightarrow \mathbb{R}$$

е непрекъсната върху множеството $[G^*]$. *Тогава е в сила формулата*

$$\iint\limits_{G^*} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{G} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{5.9.2}$$

По-надолу току-що изложената теория е илюстрирана със следния пример.

Пример 5.9.1 *Да се пресметне интегралът*

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

За целта, нека да въведем новите променливи ρ и φ по формулите

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{$*$}$$

Тогава модулът на якобиана на смяната се дава с израза (виж (5.9.6))

$$\varDelta = |J(\rho,\varphi)| = \rho.$$

Изображението $(*)$ изобразява правоъгълника

$$G = \{(\rho,\varphi):\ 0<\rho<1,\ -\pi<\varphi<\pi\}$$

взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо и с якобиан, различен от нула върху кръга

$$K = \left\{(x,y):\ x^2+y^2<1\right\},$$

от който е премахнат радиусът, лежащ върху отрицателната част на оста Ox, т.е. изображението $(*)$ изобразява правоъгълника G върху множеството

$$G^* = K \setminus \{(x,y):\ x\le 0,\ y=0\}.$$

Освен това, изображението $(*)$ изобразява затворения правоъгълник $[G]$ върху затворения кръг

$$[G^*] = [K] = \left\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\right\},$$

при което върху контура на $[G]$ това изображение вече не е взаимно еднозначно. Якобианът на изображението $(*)$ е непрекъснат върху $[G]$ а в една точка от контура (координатното начало), той има стойност нула. Следователно изображението $(*)$ удовлетворява всички условия, наложени в Теорема 5.9.2, и затова може да се приложи формулата (5.9.2) за смяна на променливите в интеграла. Така се получава последователно

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{G} \rho\cos(\pi\rho)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{0}^{1}\rho\cos(\pi\rho)\ \mathrm{d}\rho = -\frac{4}{\pi}\cdot \qquad \square$$

Последната теорема се обобщава в m-мерния случай по следния начин.

Теорема 5.9.3 *Нека G, $G^* \subset \mathbb{R}^m$ са отворени кубируеми множества. Нека $F : [G] \longrightarrow [G^*]$ е непрекъснато изображение, зададено с уравненията* (5.8.10), *взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо върху G, и якобианът му*

$$J(t) = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_m)}{\partial(t_1,\ldots,t_m)} \neq 0, \quad t \in G,$$

е непрекъснато продължим върху $[G]$. Тогава, ако функцията

$$f : [G^*] \longrightarrow \mathbb{R}$$

е непрекъсната върху $[G^*]$, то

$$\int f(x)\mathrm{d}G^* = \int f(x(t))|J(t)|\mathrm{d}G. \qquad (5.9.3)$$

Да отбележим, че смяната на променливите в многократните интеграли често опростява изследването и пресмятането на разглеждания интеграл. При това, за разлика от еднократните интеграли, нерядко целта на смяната на променливите не е да се опрости подинтегралната функция, а областта на интегриране, въпреки известно евентуално усложняване на подинтегралната функция.

В частност, в случая $m = 2$ широко използвана е така наречената полярна смяна, зададена с равенствата

$$F(\rho,\varphi) = \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (5.9.4)$$

За да се опише $\mathbb{R}^2$, променливите ρ и φ се изменят както следва:

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi, \tag{5.9.5}$$

а якобианът има стойност

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} = \rho,$$

и следователно неговият модул

$$\varDelta = |J(\rho,\varphi,z)| = \rho. \tag{5.9.6}$$

Леко обобщение представлява следната смяна,

$$F(\rho,\varphi) = \begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases} (a, b > 0), \tag{5.9.7}$$

известна като обобщена полярна смяна, за която в общия случай

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi, \tag{5.9.8}$$

а модулът на якобиана е

$$\varDelta = |J(\rho,\varphi)| = ab\rho. \tag{5.9.9}$$

Друга обобщена смяна е например смяната, зададена с

$$F(\rho,\varphi) = \begin{cases} x = a\rho\cos^k\varphi \\ y = b\rho\sin^k\varphi \end{cases} (a, b > 0,\ k = 2, 3, \ldots), \tag{5.9.10}$$

известна също като обобщена полярна смяна, за която в общия случай

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi, \tag{5.9.11}$$

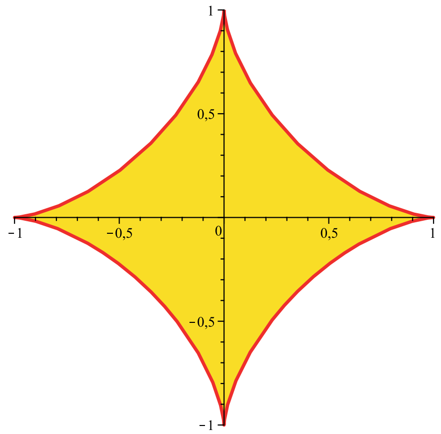
а модулът на якобиана е

$$\varDelta = |J(\rho,\varphi)| \ = \ abk\rho\ \cos^{k-1}\varphi\ \sin^{k-1}\varphi. \tag{5.9.12}$$

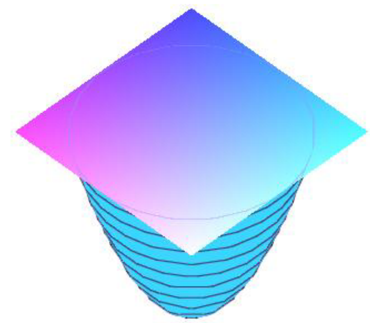
Тази екзотична смяна е илюстрирана със следния пример.

Пример 5.9.2 *Да се пресметне лицето на фигурата*

$$A^* = \left\{(x,y) : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3},\ a > 0\right\}.$$



Фигура 5.9.1: $A^* \subset \mathbb{R}^2$



Фигура 5.9.2

Поради симетрията на дадената фигура, нейното лице може да се пресметне, като първо се пресметне лицето на частта A_1^*, разположена в първи квадрант, и полученият резултат се умножи по 4. За да се пресметне това лице, може да се извърши следната смяна

$$x = \rho \cos^3 \varphi, \; y = \rho \sin^3 \varphi,$$

която води до ограниченията $0 \le \rho \le a, \; 0 \le \varphi \le 2\pi$ за $(\rho, \varphi) \in A$ и има якобиан с модул

$$\varDelta = |J(\rho, \varphi)| \, = \, 3\rho \, \cos^2 \varphi \, \sin^2 \varphi,$$

поради което

$$\mu(A^*) = 4\mu(A_1^*) = 4 \iint\limits_{A_1^*} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 12 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, \sin^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^a \rho \, \mathrm{d}\rho = \frac{3\pi a^2}{8} \cdot \; \square$$

В случая $m = 3$ също може да се използва обичайното означение на променливите x, y, z вместо x_1, x_2, x_3. Тогава Теорема 5.9.3 се записва във вида

Теорема 5.9.4 *Нека G, $G^* \subset \mathbb{R}^3$ са отворени кубируеми множества. Нека $F : [G] \longrightarrow [G^*]$ е непрекъснато изображение, зададено чрез системата функции*

$$F(u, v, w) = \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases},$$

взаимно еднозначно и непрекъснато диференцируемо върху G, и якобианът му

$$J(u,v,w) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & x'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u,v,w) \in G,$$

е непрекъснато продължим върху $[G]$. Нека освен това функцията

$$f : [G^*] \longrightarrow \mathbb{R}$$

е непрекъсната върху $[G^*]$, тогава

$$\iiint\limits_{G^*} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint\limits_{G} f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right) |J(u,v,w)|\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{5.9.13}$$

Често използвани смени на променливите при тройните (трикратните) интеграли са цилиндричната смяна, зададена с уравненията

$$F(\rho,\varphi,z) = \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, \tag{5.9.14}$$

и обобщената цилиндрична смяна

$$F(\rho,\varphi,z) = \begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad (a,b>0). \tag{5.9.15}$$

За да се опише цялото $\mathbb{R}^3$, диапазонът на изменение на променливите ρ, φ и z е както следва

$$0 \leqq \rho,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty, \tag{5.9.16}$$

а модулите на якобианите са съответно

$$\Delta = |J(\rho,\varphi,z)| = \rho \quad \text{и} \quad \Delta = |J(\rho,\varphi,z)| = ab\rho. \tag{5.9.17}$$

Друга удобна смяна на променливите в тройните интеграли е сферичната смяна, зададена със системата функции

$$F(\rho,\varphi,\psi)=\begin{cases} x= & \rho\sin\psi\cos\varphi,\\ y= & \rho\sin\psi\sin\varphi,\\ z= & \rho\cos\psi.\end{cases} \quad . \tag{5.9.18}$$

За да се опише $\mathbb{R}^3$, променливите ρ, φ и ψ се менят в следните интервали

$$0\leqq\rho,\ 0\leqq\varphi<2\pi,\ 0\leqq\psi\leqq\pi, \tag{5.9.19}$$

а модулът на якобиана се дава с равенството

$$\varDelta=|J(\rho,\varphi,\psi)|=\rho^2\sin\psi. \tag{5.9.20}$$

Понякога се използва и следната вариация на сферичната смяна

$$F(\rho,\varphi,\theta)=\begin{cases} x= & \rho\cos\theta\cos\varphi,\\ y= & \rho\cos\theta\sin\varphi,\\ z= & \rho\sin\theta,\end{cases} \tag{5.9.21}$$

с общи неравенства за променливите ρ, φ и θ (за да се опише $\mathbb{R}^3$), както следва

$$0\leqq\rho,\ 0\leqq\varphi<2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}, \tag{5.9.22}$$

и модул на якобиана

$$\varDelta=|J(\rho,\varphi,\theta)|=\rho^2\cos\theta. \tag{5.9.23}$$

Като илюстрация на смяна на променливите в троен интеграл е разгледан следният пример.

Пример 5.9.3 *Да се пресметне обемът на тялото*

$$T^*=\left\{(x,y,z):x^2+y^2\leq z,\ z\leq 4\right\}.$$

За пресмятане на обема на T^* е използвана формулата (5.7.3), в която е удобно да се направи цилиндрична смяна $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$, при което се получава

$$\mu(T^*)=\iiint\limits_{T^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^2\rho\,\mathrm{d}\rho\int\limits_{\rho^2}^4\mathrm{d}z=8\pi. \qquad \square$$

Глава 6

Криволинейни и повърхнинни интеграли

6.1 Криви и повърхнини в тримерното пространство

Нека $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ е непрекъсната крива линия (виж Дефиниция 1.4.10), зададена в следния параметричен вид:

$$\Gamma: \quad \{r(t);\ t \in [\alpha, \beta]\} \equiv \{x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t);\ t \in [\alpha, \beta]\} \quad (6.1.1)$$

в интервала $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

Дефиниция 6.1.1 *Точката $A = r(\alpha)$ се нарича начало на кривата, а точката $B = r(\beta)$ – неин край.*

Дефиниция 6.1.2 *Точка от кривата Γ, която е образ на повече от една точка от интервала $[\alpha, \beta]$ (с изключение евентуално на началото и края), се нарича точка на самопресичане или кратна точка на тази крива. Крива, която няма други точки на самопресичане (освен евентуално $r(\alpha) = r(\beta)$) и такава, че $r(t) \neq r(\alpha) = r(\beta)$; $t \in (\alpha, \beta)$, се нарича прост контур. Кривата Γ се нарича затворена крива или затворен контур, ако началото ѝ съвпада с нейния край, т.е. $r(\alpha) = r(\beta)$.*

Дефиниция 6.1.3 *В частност, ако кривата Γ лежи в някаква равнина, тя се нарича равнинна. Ако посочената равнина е координатната равнина xOy, то представянето на тази крива има вида:*

$$\Gamma: \quad \{r(t);\ t \in [\alpha, \beta]\} \equiv \{x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = 0;\ t \in [\alpha, \beta]\},$$

при което уравнението $z = 0$ обикновено не се пише, освен ако това би довело до недоразумение.

Приведената дефиниция за крива има за основа физичната представа за траектория (път) на движеща се в пространството материална точка. Роля на параметъра в този случай може да играят времето за движение, изминатият път и т.н.

По-надолу са приведени дефиниции на някои специални видове непрекъснати криви.

Дефиниция 6.1.4 *Кривата Γ се нарича диференцируема, ако координатните ѝ функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ са диференцируеми в $[\alpha, \beta]$, а*

$$r'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)),$$

се нарича производна на представянето $r(t)$ на кривата. Ако освен това тези функции са и непрекъснато диференцируеми, то кривата се нарича непрекъснато диференцируема.

Дефиниция 6.1.5 *Нека кривата Γ, зададена с (6.1.1), е диференцируема крива. Точката на кривата Γ, в която $r' \neq 0$, се нарича неособена, а точката, в която $r' = 0$ – особена.*

Да отбележим, че от равенството

$$|r'| = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}$$

следва, че точката $(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ от кривата Γ е неособена тогава и само тогава, когато $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) > 0$, т.е. поне една от производните $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ и $\chi'(t)$ е различна от нула. Добре известно е, че кривата Γ има допирателна във всяка неособена точка.

Да отбележим, че ако $r(t) \neq r(\alpha) = r(\beta)$; $t \in (\alpha, \beta)$, при едно параметрично представяне на дадена крива, то това условие е изпълнено при всяко друго представяне. Да отбележим също така, че и понятието особена точка не зависи от начина, по който е зададена кривата.

Дефиниция 6.1.6 *Кривата Γ се нарича гладка, ако е непрекъснато диференцируема крива без особени точки. Ако дадената крива не е гладка, но може да се представи като сума на краен брой гладки криви, се казва, че тя е по части гладка (или частично гладка).*

Дефиниция 6.1.7 *Кривата се нарича ректифицируема, ако има крайна дължина.*

За да преминем към понятието повърхнина се нуждаем от още една дефиниция.

Дефиниция 6.1.8 *Множеството $D \subset \mathbb{R}^2$, се нарича едносвързано, ако за всяка непрекъсната затворена крива линия $\gamma \subset D$ е изпълнено $Int\gamma \subset D$, където с $Int\gamma$ е означено множеството от всички точки, които се намират в ограниченото множество $\widetilde{D}$ с контур $\partial\widetilde{D} = \gamma$.*

Нека сега $D \subset \mathbb{R}^2$ е едносвързана област (виж Дефиниция 1.4.13) и за всички точки от тази област са дефинирани три функции

$$x = x(u, v), \ y = y(u, v), \ z = z(u, v), \tag{6.1.2}$$

или, което е същото, една векторна функция

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \tag{6.1.2*}$$

където $\mathbf{r}(u, v)$ е вектор с компоненти $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

Дефиниция 6.1.9 *Казва се, че уравненията* (6.1.2), *или все едно* (6.1.2*), *дефинират гладка повърхнина, ако функциите* (6.1.2) *са непрекъснато диференцируеми в областта D и векторното произведение*

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}'_u(u, v) \times \boldsymbol{r}'_v(u, v) \neq 0, \quad (u, v) \in D, \tag{6.1.3}$$

а векторите

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}'_u(u, v) \times \boldsymbol{r}'_v(u, v), \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|} \tag{6.1.4}$$

се наричат съответно нормален вектор (или нормала) и единичен нормален вектор към тази повърхнина. Ако повърхнината не е гладка, но може да се раздели на краен брой гладки части, тя се нарича частично гладка или по части гладка повърхнина.

Поради непрекъснатата диференцируемост на (6.1.2) и условието (6.1.3) следва, че векторът $\mathbf{n}$ е непрекъснат по u и v в някаква околност на произволна точка от повърхнината, т.е. *в околността на всяка точка от гладка повърхнина съществува непрекъснато векторно поле от нормали* .

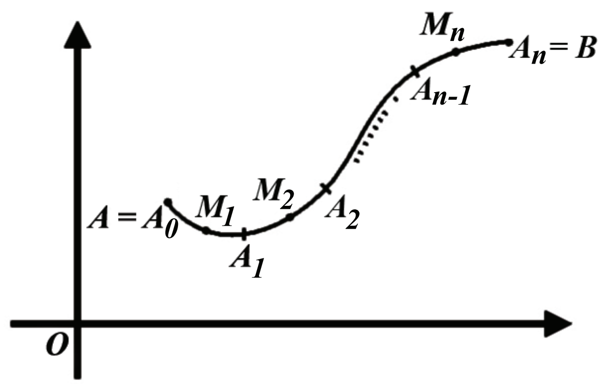
Изобщо, върху цялата повърхнина такова непрекъснато векторно поле от нормали може и да не съществува.

Пример 6.1.1 (Лист на Мьобиус) *Например ако залепим правоъгълника $ABCD$ така, че A да съвпада с C, а B с D, то се получава повърхнина, известна като лист на Мьобиус. Нейната нормала се характеризира с това, че след като направи една обиколка, тя сменя посоката си с противоположната.*

В по-нататъшното изложение се разглеждат само такива повърхнини, за които съществува непрекъснато векторно поле от нормали върху цялата повърхнина. Прието е такива повърхнини да се наричат *двустранни*.

6.2 Дефиниции за криволинейни интеграли от първи и втори род

Нека функциите $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ са дефинирани върху непрекъснатата проста ректифицируема крива Γ с начална точка A и крайна точка B.



Фигура 6.1.1 Кривата Γ

С помощта на точките $A \equiv A_0, A_1, \ldots, A_n \equiv B$ с координати съответно $A_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$, кривата Γ е разделена на n дъгички и върху всяка дъгичка произволно е избрана точка $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, в която се пресмяат стойностите $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ на функциите f, P, Q и R. Да отбележим, че аналогичен процес на разделяне може да бъде проведен и в случай на затворена крива, ако за точка A_0 (A_n) се вземе коя да е нейна точка, а останалите точки A_i да се разположат последователно по кривата в едната от двете възможни посоки.

За дължината на i-та дъгичка е използвано означението Δl_i, а за дължината на най-дългата дъгичка от разделянето – δ_n, т.е.

$$\Delta l_i = \text{дължината на } \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}, \quad \delta_n = \max_{i=1\div n} \Delta l_i.$$

Наред с това са въведени и означенията

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1},\ \Delta z_i = z_i - z_{i-1},\ \text{за } i = 1, 2, \cdots, n.$$

По-нататък са образувани съответните интегрални суми за всяка една от разглежданите функции, както следва

$$\sigma_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i, \tag{6.2.1}$$

$$\sigma_n(P) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i, \tag{6.2.2}$$

$$\sigma_n(Q) = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i, \tag{6.2.3}$$

$$\sigma_n(R) = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i. \tag{6.2.4}$$

Дефиниция 6.2.1 *Границата на интегралната сума* (6.2.1) (*ако съществува, не зависейки нито от начина на разделяне, нито от избора на точките* M_i) *при* δ_n, *клоняща към нула, се нарича криволинеен интеграл от първи род от функцията* $f(x, y, z)$ *върху кривата* Γ *и се записва* $\int_\Gamma f(x, y, z)\mathrm{d}l$, *или кратко* $\int_\Gamma f\mathrm{d}l$, *т.е. криволинейният интеграл от първи род се дефинира с равенството*

$$\int_\Gamma f(x, y, z)\mathrm{d}l = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_n(f) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta l_i, \tag{6.2.5}$$

ако границата в (6.2.5) *съществува.*

Дефиниция 6.2.2 *Границата на интегралната сума* (6.2.2) (*ако съществува, не зависейки нито от начина на разделяне, нито от избора на точките* M_i) *при* δ_n, *клоняща към нула, се нарича криволинеен интеграл от втори род от функцията* $P(x,y,z)$ *върху кривата* Γ *и се записва* $\int\limits_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x$, *или кратко* $\int\limits_\Gamma P\mathrm{d}x$. *Аналогично* (*чрез границите на* (6.2.3) *и* (6.2.4)) *се дефинират съответно* $\int\limits_\Gamma Q\mathrm{d}y$ *и* $\int\limits_\Gamma R\mathrm{d}z$, *т.е. криволинейните интеграли от втори род се дефинират с равенствата*

$$\int\limits_\Gamma P\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta_n\to 0}\sigma_n(P),\ \int\limits_\Gamma Q\,\mathrm{d}y = \lim_{\delta_n\to 0}\sigma_n(Q),\ \int\limits_\Gamma R\,\mathrm{d}z = \lim_{\delta_n\to 0}\sigma_n(R), \tag{6.2.6}$$

разбира се, ако границите в (6.2.6) *съществуват.*

Дефиниция 6.2.3 *Сумата на криволинейните интеграли от втори род* $\int\limits_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x$, $\int\limits_\Gamma Q(x,y,z)\mathrm{d}y$, $\int\limits_\Gamma R(x,y,z)\mathrm{d}z$, *ако те съществуват, също се нарича криволинеен интеграл от втори род върху кривата* Γ *("от общ вид") и се означава по следния начин*

$$\int\limits_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int\limits_\Gamma P\,\mathrm{d}x + \int\limits_\Gamma Q\,\mathrm{d}y + \int\limits_\Gamma R\,\mathrm{d}z. \tag{6.2.7}$$

Казва се също, че интегралът (6.2.7) *е криволинеен интеграл от втори род от векторната функция*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

върху кривата Γ *и се записва още във вида* $\int\limits_\Gamma \boldsymbol{F}\mathrm{d}r$, *т. е.*

$$\int\limits_\Gamma \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}r = \int\limits_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z. \tag{6.2.8}$$

Да съпоставим сега дефинираните интеграли от втори род с тези от първи род. Въпреки очевидното сходство на двете дефиниции, има съществена разлика между тях. Така например, при криволинейния интеграл от първи род при съставяне на интегралната сума стойността $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ на функцията f е умножена с дължината на дъгата Δl_i на частта $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ от кривата $\overset{\frown}{AB}$, докато при криволинейния интеграл от втори род стойността $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ се умножава с величината на проекцията Δx_i (Δy_i или Δz_i) на споменатата дъгичка $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ върху оста Ox (Oy или Oz).

Ясно е, че ориентацията (посоката на описване) на кривата $\overset{\frown}{AB}$, по която се интегрира, не влияе на стойността на интеграла от първи род, защото дължината Δl_i на дъгата $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ не зависи от тази ориентация. По друг начин стоят нещата при интегралите от втори род. В този случай величината Δx_i (съответно Δy_i или Δz_i) съществено зависи от посоката на описване на дъгата и сменя знака си със смяната на посоката на обход на кривата с обратната. По такъв начин, за интегралите от втори род са изпълнени следните равенства

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y,z)\mathrm{d}x = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)\mathrm{d}x,$$

съответно

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y,z)\mathrm{d}y,$$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} R(x,y,z)\mathrm{d}z = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

при това, от съществуването на интегралите, които се намират от едната страна на равенствата, следва съществуването и на интегралите от другата страна. Най-сетне, и за криволинейния интеграл “от общ вид” е изпълнено аналогично равенство, както следва

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z, \tag{6.2.9}$$

което показва, че и в този случай смяната на посоката на интегриране сменя знака на интеграла.

Като частен случай на (6.2.5) и (6.2.6) може да се получи криволинеен интеграл от първи род и два криволинейни интеграла от втори род за равнинната крива $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$, а именно

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}l, \quad \int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad \int\limits_{\Gamma} Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{6.2.10}$$

Сумата на последните два интеграла и в този случай се нарича криволинеен интеграл от втори род върху кривата Γ ("от общ вид") и се означава по следния начин

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Gamma} Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{6.2.11}$$

Както е отбелязано по-горе, криволинейният интеграл от втори род зависи от посоката на описване на кривата $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$. Затова трябва да бъде направена специална уговорка за това, какво да разбираме под символите (6.2.9) и (6.2.11), когато Γ е затворена крива (т.е. когато точката A съвпада с точката B).

От двете възможни посоки на описване на затворения контур Γ, положителна се нарича тази посока, при движението по която областта, лежаща във вътрешността на контура, остава от лявата страна (т.е. движението се извършва обратно на часовниковата стрелка).

Забележка 6.2.1 *В по-нататъшното изложение се счита (освен ако не е казано нещо друго), че затвореният контур Γ, по който се извършва интегрирането, винаги се описва в положителна посока.*

Когато е необходимо да се подчертае специално, че контурът Γ (по който се интегрира) е затворен, криволинейният интеграл от втори род (6.2.9), съответно (6.2.11), се означава както следва

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z, \qquad \oint\limits_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

Аналогично на изложената тук теория на криволинейните интеграли в тримерното пространство $\mathbb{R}^3$ (както и в равнината) се изгражда и теорията на криволинейните интеграли в пространството $\mathbb{R}^m$ за $m > 3$.

Да отбележим в заключение, че елементарните свойства на обикновените риманови интеграли (като линейност и адитивност относно множествата) лесно се пренасят върху разглежданите криволинейни интеграли, но ние няма да се спираме на това.

6.3 Свойства и пресмятане на криволинейни интеграли

Ако Γ е гладка (по части гладка) крива линия, зададена в параметричния вид

$$\Gamma \equiv \{x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t);\ t \in [t_1, t_2]\}\,, \tag{6.3.1}$$

и f е непрекъсната функция върху Γ, то криволинейният интеграл от първи род (6.2.5) съществува и се пресмята чрез следния определен интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}l = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{6.3.2}$$

При дадените допълнителни условия, адитивностите на криволинейния интеграл от първи род относно подинтегралната функция и относно интеграционната крива следват и от (6.3.2).

Ако кривата Γ е зададена в декартови координати

$$\Gamma \equiv \{x = x,\ y = \psi(x),\ z = \chi(x);\ z \in [a, b]\}\,, \tag{6.3.3}$$

то формулата (6.3.2) се свежда до

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}l = \int\limits_{a}^{b} f(x,\psi(x),\chi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)+\chi'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{6.3.4}$$

Ако Γ е равнинна крива, зададена в полярни координати, т.е.

$$\Gamma:\ \rho = \rho(\vartheta),\ \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2], \tag{6.3.5}$$

то интегралът от първи род (6.2.10) се пресмята по формулата

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}l = \int\limits_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} f(\rho\cos\vartheta,\ \rho\sin\vartheta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\vartheta. \tag{6.3.6}$$

За илюстрация е разгледан следният пример.

Пример 6.3.1 *Да се пресметне* $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{y}\,\mathrm{d}l$*, където* Γ *е дъга от циклоидата*

$$\Gamma \equiv \{x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t;\ t \in [0, \pi]\}\,.$$

Тъй като кривата Γ, по която се интегрира, е зададена параметрично, за пресмятане на интеграла се прилага формулата (6.3.2), което води до следния резултат

$$\int\limits_{\Gamma} \sqrt{y}\,\mathrm{d}l = \int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\pi. \qquad \square$$

Нека функциите $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ са дефинирани върху гладката крива Γ с начална точка A и крайна точка B.

Ако кривата Γ е зададена в параметричния вид (6.3.1), то криволинейният интеграл (6.2.7) от втори род се пресмята чрез определен интеграл съгласно формулата

$$\int\limits_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{\widetilde{P}\varphi' + \widetilde{Q}\psi' + \widetilde{R}\chi'\right\}\,\mathrm{d}t, \tag{6.3.7}$$

където

$$\widetilde{P}(t) = P\left[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right],\ \widetilde{Q}(t) = Q\left[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right],$$

$$\widetilde{R}(t) = P\left[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right].$$

По-надолу следват два примера, в които е приложена тази формула.

Пример 6.3.2 *Да се пресметне криволинейният интеграл*

$$I = \int\limits_{C} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + (x+y+z)\,\mathrm{d}z$$

върху винтовата линия

$$C \equiv \left\{x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = \frac{h}{2\pi}t;\ t\in[0,2\pi]\right\},\ a>0,\ h>0.$$

Кривата C е зададена параметрично и затова прилагането на формулата (6.3.7) води до следните пресмятания:

$$I = \int_0^{2\pi} \left[a\sin t(-a\sin t) - a\cos t(a\cos t) + \left(a\cos t + a\sin t + \frac{h}{2\pi}t\right)\frac{h}{2\pi}\right] \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-a^2 + \frac{ha}{2\pi}\cos t + \frac{ha}{2\pi}\sin t + \frac{h^2}{4\pi^2}t\right) \mathrm{d}t = -2\pi a^2 + \frac{h^2}{2}. \qquad \square$$

Пример 6.3.3 *Да се пресметне криволинейният интеграл*

$$I = \int_\Gamma xy\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$$

върху параболата $x = y^2$ от точка $O(0,0)$ до точка $M(4,2)$.

Равнинната крива е зададена с явна функция и за параметър е естествено да се вземе едната от променливите (нека в този случай това да бъде променливата y), което води до

$$\Gamma \equiv \left\{x = t^2,\ y = t;\ t \in [0,2]\right\}$$

Сега вече може да се приложи формулата (6.3.7), която в случая води до следните пресмятания

$$I = \int_0^2 \left(t^2\,t\,2t + t^2 - t\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \left(2t^4 + t^2 - t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{202}{15}. \qquad \square$$

Дотук се занимавахме с въпроса за директно интегриране. Понякога пресмятането на интеграла може да се улесни, като се използват някои специфични свойства както на подинтегралната функция, така и на криволинейния интеграл.

Така например, ако подинтегралната функция е пълен диференциал, т. е. съществува еднозначна и диференцируема функция U в едносвързано множество D, в която (условието за едносвързаност е съществено и не може да се пропуска)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P,\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial U}{\partial z} = R, \tag{6.3.8}$$

то стойността на (6.2.7) не зависи от кривата $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ на интегриране, а само от началната и крайната точка, и неговата стойност е $U(B) - U(A)$. Ако кривата, по която се интегрира, е затворена, то стойността на криволинейния интеграл при изпълнени условия (6.3.8) е нула.

Необходимите и достатъчни условия изразът

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

да бъде пълен диференциал на два пъти непрекъснато диференцируема функция U са:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{6.3.9}$$

Условията (6.3.9) се наричат условия за интегруемост.

Нека D е равнинно множество с частично гладка граница, а функциите $P(x,y), Q(x,y), \dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ са непрекъснати в затвореното множество $[D]$. Тогава е в сила *формулата на Грийн–Гаус*

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{6.3.10}$$

Пример 6.3.4 *Да се пресметне криволинейният интеграл*

$$I = \int\limits_{\Gamma} (3x - y)\,\mathrm{d}x + (y - x)\,\mathrm{d}y$$

върху затворената начупена линия $ABCA$ с върхове точка $A(0,0)$, точка $B(1,0)$ и точка $C(0,2)$.

Интегралът може да бъде пресметнат с използване на формулата (6.3.7), но тъй като преди това начупената линия $ABCA$ се нуждае от параметризиране, е приложена формулата на Грийн–Гаус (6.3.10), според която

$$I = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial(y-x)}{\partial x} - \frac{\partial(3x-y)}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Същият резултат се получава и след отчитане на факта, че подинтегралният израз $(3x - y)\,\mathrm{d}x + (y - x)\,\mathrm{d}y$ е пълен диференциал, тъй като за него са изпълнени свойствата (6.3.9) (по-точно $\mathrm{d}(y^2/2 + 3x^2/2 - xy) = (3x - y)\,\mathrm{d}x + (y - x)\,\mathrm{d}y$), а контурът, по който се извършва интегрирането, е затворен. $\square$

6.4 Приложение на криволинейните интеграли

Криволинейните интеграли имат многобройни геометрични и физични приложения. Тук са изброени само някои от тях.

Най-елементарното е възможността за пресмятането на дължината на дъгата Γ, по която се извършва интегрирането. Тя се пресмята чрез криволинейния интеграл

$$\int_{\Gamma} \mathrm{d}l, \tag{6.4.1}$$

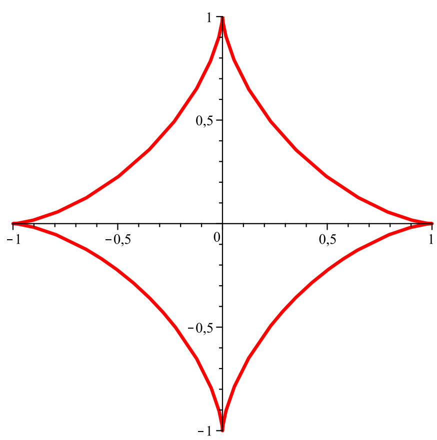
и това следва непосредствено от (6.2.1) и (6.2.5) (за частния случай, в който $f(x, y, z) \equiv 1$).

Пример 6.4.1 *С помощта на криволинеен интеграл от първи род да се намери дължината на астроидата*

$$C \equiv \left\{x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t;\ \ t \in [0, 2\pi]\right\}, a > 0.$$

От графиката на астроидата (Фиг. 6.1.2) се вижда, че тя е симетрична и поради това е достатъчно да се сметне дължината на частта от кривата в първи квадрант по формула (6.4.1) и полученият резултат да се умножи по 4:

$$l = \int_C \mathrm{d}l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = 6a. \qquad \square$$



Фигура 6.1.2: Астроида

От формулата (6.3.10) на Грийн–Гаус автоматично се получава следната формула

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \tag{6.4.2}$$

за пресмятане на лице на равнинно множество D, чиято граница Γ е проста затворена крива.

От (6.4.2) пък в случай на полярни координати $\rho = \rho(\varphi)$ се получава

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} \rho^2\,\mathrm{d}\varphi. \tag{6.4.3}$$

Пример 6.4.2 *С помощта на криволинеен интеграл да се пресметне лицето на една навивка на спиралата на Архимед:*

$$C \equiv \{\rho = a\varphi, \,|\, \varphi \in [0, 2\pi]\}\,,\; a > 0.$$

След прилагане на формулата (6.4.3) се получава следният резултат:

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_{C} \rho^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} a^2\varphi^2 = \frac{a^2}{2} \times \left.\frac{\varphi^3}{3}\right|_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{4a^2\pi^3}{3}. \qquad \square$$

Лицето σ на цилиндър с управителна линия

$$C \equiv \{x = \varphi(t),\; y = \psi(t),\; z = 0;\;\; t \in [t_1, t_2]\}\,,$$

който е ограничен от равнината xOy и от линията

$$C^* \equiv \{x = \varphi(t),\; y = \psi(t),\; z = \chi(t);\;\; t \in [t_1, t_2]\}\,,$$

също се пресмята с криволинеен интеграл от първи род по формулата

$$\int\limits_{C} z\,\mathrm{d}l, \tag{6.4.4}$$

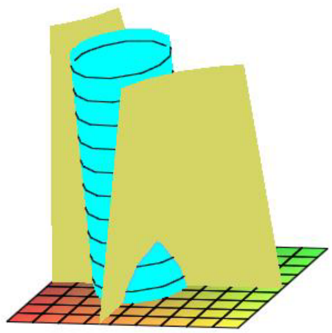
където $\mathrm{d}l$ е линейният елемент на дъгата C.

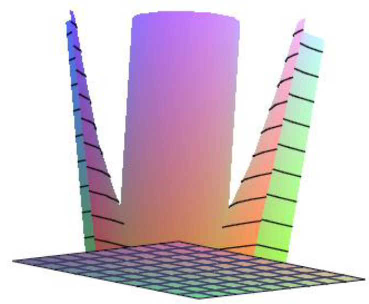
Пример 6.4.3 *Да се пресметне лицето на цилиндричната повърхнина с управителна крива $x^2 + y^2 = 1$, ограничена отдолу от равнината xOy и отгоре от повърхнината $z = xy$.*

Параметричните уравнения на окръжността са

$$C \equiv \{x = \cos t,\ y = \sin t,\ | t \in [0, 2\pi]\}.$$

От графиката се вижда наличие на симетрия,





Фигура 6.1.1

която се използва при пресмятанията по формула (6.4.4)

$$\sigma = \int_C z\,\mathrm{d}l = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,\mathrm{d}t = 1. \quad \square$$

Ако $\rho(x, y, z)$ е плътността на материалната крива Γ, то масата m на тази крива се пресмята чрез следния криволинеен интеграл от първи род

$$m = \int_\Gamma \rho(x, y, z)\mathrm{d}l,$$

а центърът на тежестта $G(x_G, y_G, z_G)$ на материална крива има координати

$$x_G = \frac{\int_\Gamma x\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}l}{\int_\Gamma \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}l},\ y_G = \frac{\int_\Gamma y\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}l}{\int_\Gamma \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}l},\ z_G = \frac{\int_\Gamma z\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}l}{\int_\Gamma \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}l}. \qquad (6.4.5)$$

Пример 6.4.4 *Дадена е материална отсечка, свързваща точка $M(1,0)$ с точка $N(2,3)$. Плътността във всяка точка е равна на x^2+y^2. Да се намерят координатите на центъра на тежестта на отсечката.*

Кривата е равнинна и затова се използват формулите (6.4.5) в двумерния случай. Параметричните уравнения на отсечката са

$$MN \equiv \{x = 1+t,\ y = 3t,\ |\, t \in [0,1]\},$$

а линейният елемент в този случай е

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(1+t)'^2 + (3t)'^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{10}.$$

Масата на материалната отсечка е

$$m = \int\limits_0^1 (1+2t+t^2+9t^2)\sqrt{10}\,\mathrm{d}t = \frac{16\sqrt{10}}{3}.$$

Пресмятат се моментите от първи ред

$$\int\limits_0^1 (1+t)(1+2t+t^2+9t^2)\sqrt{10}\,\mathrm{d}t = 9\sqrt{10},$$

$$\int\limits_0^1 3t(1+2t+t^2+9t^2)\sqrt{10}\,\mathrm{d}t = 11\sqrt{10},$$

след което се получават координатите на центъра на тежестта

$$x_{G} = \frac{27\sqrt{10}}{16\sqrt{10}} = \frac{27}{16}, \quad y_{G} = \frac{33\sqrt{10}}{16\sqrt{10}} = \frac{33}{16}. \qquad \square$$

Физическият смисъл на криволинеен интеграл от втори род е работата, която силата

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

извършва за преместване по криволинеен път от началната до крайната му точка.

Пример 6.4.5 *Да се намери работата, която силата*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$$

извършва по отсечката AB от точката $A(1,1,2)$ до точката $B(2,2,3)$.

Търсената работа се пресмята по формулата

$$I = \int\limits_{AB} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z,$$

и изчисленията могат да се извършат по (6.3.7) след параметризация на отсечката AB. Обаче тук това е направено по друг начин. Тъй като функциите $P(x,y,z) = yz$, $Q(x,y,z) = yz$ и $R(x,y,z) = xy$ удовлетворяват уравненията (6.3.9), то $yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$ е пълен диференциал на някаква функция U и интегралът не зависи от пътя на интегриране. По-внимателен поглед показва, че $\mathrm{d}U = \mathrm{d}(xyz) = yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$, и следователно

$$I = U(2,2,3) - U(1,1,2) = 12 - 2 = 10.$$

6.5 Повърхнинни интеграли от първи род

Нека S е частично гладка двустранна повърхнина и функцията $f(x,y,z)$ е дефинирана и ограничена върху нея. Повърхнината се разделя на части S_i, които имат общи точки евентуално по границите си и лица σ_i. Върху всяка част се избира произволна точка $M_i(x_i,y_i,z_i)$, в която се пресмята стойността на функцията $f(x_i,y_i,z_i)$.

Дефиниция 6.5.1 *Ако сумата $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\sigma_i$ има крайна граница при условие, че максималната площ σ_i клони към нула (не зависейки нито от начина на разделяне, нито от избора на точките $M_i(x_i,y_i,z_i)$), се казва, че повърхнинният интеграл от първи род от $f(x,y,z)$ върху S съществува и се записва*

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\max\sigma_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\sigma_i. \tag{6.5.1}$$

Ако повърхнината S е зададена с векторно-параметрично уравнение

$$S: \ \mathbf{r}(x,y,z) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \ (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

и f е непрекъсната върху S, то интегралът (6.5.1) съществува и се пресмята по формулата

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad (6.5.2)$$

където E, F, G са гаусовите коефициенти (6.5.3) на повърхнината

$$E = (\mathbf{r}'_u)^2, \quad G = (\mathbf{r}'_v)^2, \quad F = \mathbf{r}'_u\,\mathbf{r}'_v. \quad (6.5.3)$$

Ако повърхнината е зададена чрез явна функция $z = z(x,y)$, то независимите променливи могат да играят ролята на параметри и тогава

$$EG - F^2 = 1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2$$

и формула (6.5.2) приема вида:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (6.5.4)$$

Пример 6.5.1 *Да се пресметне интегралът по повърхнина от първи род*

$$I = \oiint\limits_S (x^2+y^2)d\sigma,$$

където S е сферата $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$.

Векторно-параметричното уравнение на сферата в сферични координати е

$$S \equiv \mathbf{r} = a\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + a\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + a\cos\vartheta\mathbf{k},$$

$$D \equiv \{(\varphi,\vartheta)\,|\,0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\vartheta\le\pi\}\,.$$

Пресмятат се изразите

$$\mathbf{r}'_\varphi = -a\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{i} + a\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_\vartheta = a\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + a\cos\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} - a\sin\vartheta\mathbf{k},$$

и гаусовите коефициенти

$$E = a^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi = a^2\sin^2\theta,$$

$$F = -a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + 0 = 0,$$
$$G = a^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + a^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + a^2\sin^2\vartheta = a^2.$$

В резултат на прилагането на формула (6.5.2) се получава за пресмятане следният двоен интеграл

$$I = \iint\limits_D a^2\sin^2\vartheta\sqrt{a^4\sin^2\vartheta - 0^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = a^4\iint\limits_D \sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= a^4\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \times \int\limits_0^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= -2\pi a^4\int\limits_0^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\cos\vartheta = \frac{8\pi a^4}{3}. \qquad \square$$

6.6 Повърхнинни интеграли от втори род

Нека S е гладка двустранна повърхнина, векторът

$$\mathbf{n}(x,y,z) = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

е единичен нормален вектор към нея (който определя едната от двете страни на повърхнината) и

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

е векторна функция, дефинирана и ограничена върху S.

Проекцията на вектора $\mathbf{F}$ върху нормалата към повърхнината S е

$$F_n = \mathbf{F}(x,y,z).\mathbf{n}(x,y,z) = P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma.$$

Дефиниция 6.6.1 *Интегралът по повърхнина от първи род*

$$\iint\limits_S \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)\,\mathrm{d}\sigma$$

се нарича интеграл по повърхнина от втори род от векторната функция $\boldsymbol{F}$ *по определената страна от повърхнината* S *и се записва*

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{6.6.1}$$

Ако се проектира по нормалата на другата страна на повърхнината S, интегралът по повърхнина от втори род сменя знака си.

За удобство да означим интеграла (6.6.1) както следва

$$I \equiv \iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ако гладката (частично гладката) повърхнината S е зададена с векторно параметрично уравнение

$$\mathbf{r}(x,y,z) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},\ (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

и векторната функция $\mathbf{F}$ е дефинирана и непрекъсната върху S, то повърхнинният интеграл от втори род съществува и се пресмята чрез следния двоен интеграл

$$I = \iint\limits_D \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{6.6.2}$$

Нормалният вектор $\mathbf{N}(A,B,C)$ към векторно-параметрично зададена повърхнина се получава като векторно произведение на два тангенциални към повърхнината вектора, т.е.

$$\mathbf{N}(A,B,C) = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}.$$

Тъй като

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

то

$$I = \iint\limits_D (PA + QB + RC)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v. \tag{6.6.3}$$

Ако гладката (частично гладката) повърхнина е зададена с уравнението $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, формулата за пресмятане на криволинеен интеграл от втори род (6.6.2) добива вида

$$I = \iint\limits_D (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{6.6.4}$$

а формула (6.6.3) съответно

$$I = \iint\limits_D \left\{-P\left[x, y, z\left(x, y\right)\right]\frac{\partial z}{\partial x} - Q\left[x, y, z\left(x, y\right)\right]\frac{\partial z}{\partial y} + R\left[x, y, z\left(x, y\right)\right]\right\} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{6.6.5}$$

В случай, че повърхнината е зададена чрез уравнението

$$F(x, y, z) = 0,\ (x, y) \in D,$$

вземайки предвид изразите за частните производни на $z(x, y)$, се получава следната формула:

$$I = \iint\limits_D \left(PF'_x + QF'_y + RF'_z\right)\frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{F'_z}. \tag{6.6.6}$$

Пресмятането на интегралите от втори род може да се опрости чувствително, ако се използват някои специфични свойства на подинтегралните функции и на интегралите. Изключително полезна в това отношение се оказва формулата на *Гаус–Остроградски*. Тя дава връзка между повърхнинен интеграл от втори род и троен интеграл в случай на гладка (частично гладка) затворена повърхнина S, която е граница на множеството $V \subset \mathbb{R}^3$ и непрекъснатост на функциите

$$P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z),\ \frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial z},$$

т.е. в сила е формулата

$$\oiint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \quad (6.6.7)$$

Друга полезна формула е формулата на *Стокс*, която дава зависимост между криволинеен интеграл от втори род и повърхнинен интеграл от втори род. Нека Γ е частично гладка затворена крива в $\mathbb{R}^3$ и функциите $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ заедно с първите си частни производни са непрекъснати. Тогава е в сила *формулата на Стокс*

$$\oint\limits_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad (6.6.8)$$

където S е произволна двукратно гладка двустранна повърхнина, опъната на кривата Γ.

Пример 6.6.1 *Да се пресметне*

$$\oiint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

по външната страна на крайния обем, получен при пресичането на равнината $z=1$ и ротационния параболоид $z=x^2+y^2$.

Интегрирането се извършва по частично гладка повърхнина S, която е обединение от затворен централен единичен кръг $x^2+y^2=1$ в равнината $z=1$, означен със S_1, и част от параболоида $z=x^2+y^2$, $z\leqslant 1$, означена със S_2. Имаме:

$$S_1 \equiv \mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\mathbf{k},\ D\equiv x^2+y^2\le 1,$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}, \quad I_1 = \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi.$$

В цилиндрични координати повърхнината S_2 има представянето

$$S_2 \equiv \mathbf{r} = r\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\varphi\mathbf{j} + r^2\mathbf{k},\ D \equiv \{0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

поради което

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 2r \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -2r^2\cos\varphi\mathbf{i} - 2r^2\sin\varphi\mathbf{j} + r\mathbf{k}.$$

Тъй като външната нормала на повърхнината S_2 сочи "надолу" (Фиг. 5.9.2), то третата ѝ координата е отрицателна, и външната нормала е с посоката на $-\mathbf{N}$. Тогава от (6.6.3) се получава следният двоен интеграл:

$$I_2 = \iint\limits_D \left[r\cos\varphi\left(2r^2\cos\varphi\right) + r\sin\varphi\left(2r^2\sin\varphi\right) - r^3\right]\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \iint\limits_D r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

и следователно

$$I = I_1 + I_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Същият резултат се получава и ако се приложи формулата на Гаус–Остроградски (6.6.7), именно

$$I = 3\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ V \equiv \left\{z \le 1, z \ge x^2 + y^2\right\},$$

след което се преминава към цилиндрични координати. Резултатът от пресмятането е

$$I = 3\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{\rho^2}^1 \rho\,\mathrm{d}z = 6\pi\int\limits_0^1 \rho\left(1-\rho^2\right)\,\mathrm{d}\rho =$$

$$= 6\pi\left.\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^1 = \frac{3\pi}{2}. \qquad \square$$

6.7 Приложение на повърхнинните интеграли

Лицето σ на повърхнината S може да се пресметне чрез повърхнинния интеграл

$$\sigma = \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma. \tag{6.7.1}$$

Масата на материална повърхнина S с плътност $\rho(x,y,z)$ се пресмята чрез

$$M = \iint\limits_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{6.7.2}$$

а координатите на центъра на тежестта – чрез формулите:

$$x_G = \frac{\iint\limits_S x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma},\ y_G = \frac{\iint\limits_S y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma},\ z_G = \frac{\iint\limits_S z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma}. \tag{6.7.3}$$

Пример 6.7.1 *Да се намери лицето на частта от повърхнината $z = xy$, която е във вътрешността на цилиндъра $x^2 + y^2 = 1$.*

За намиране на търсеното лице се използва формулата (6.7.1), по която

$$s = \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

За пресмятане на последния двоен интеграл е подходящо да се премине към полярни координати

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \Delta = |J| = \rho,$$

което води последователно до

$$s = \iint\limits_D \rho\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi,\ D \equiv \{0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

$$s = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \times \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi \times \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho^2 = \pi\,\left.\frac{\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1,$$

$$s = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right). \qquad \square$$

Физическият смисъл на повърхнинен интеграл от втори род е количеството флуид, което преминава през повърхнината S за единица време в пространство, запълнено с флуид (т.е. потокът на векторно поле през повърхнина).

Пример 6.7.2 *Да се пресметне потокът на векторното поле*

$$\boldsymbol{F} = (x + y^2,\ y + z^3,\ x^4 - 2z)$$

през външната страна на елипсоида

$$S: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Потокът на даденото векторно поле се дава с формулата

$$\Pi = \iint\limits_S (x + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y + z^3)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x^4 - 2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Тъй като елепсоидът S, по който се извършва интегрирането, е затворена повърхнина, потокът може да се пресметне с помощта на формулата (6.6.7) на Гаус–Остроградски. За целта първо се изисква да бъде намерена сумата $P'_x + Q'_y + R'_z$. Тъй като

$$P'_x = 1,\ Q'_y = 1,\ R'_z = -2, \text{ то } P'_x + Q'_y + R'_z = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Ако T означава вътрешността на дадената повърхнина, то за потока Π се получава

$$\Pi = \iiint\limits_T (P'_x + Q'_y + R'_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_T 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0. \qquad \square$$

Библиография

[1] Д. Дойчинов (2006), *Математически анализ*, Университетско изд. "Св. Климент Охридски", София.

[2] В.А. Илин, В.А. Садовничи, Бл. Х. Сендов (1989), *Математически анализ*, том 1, 2, "Наука и изкуство", София.

[3] Л.Д. Кудрявцев (2003), *Курс математического анализа*, том 1-3, "Дрофа", Москва.

(http://www.alleng.ru/d/math/math98.htm)

[4] И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай (1979), *Справочное пособие по математическому анализу*, том 1-2, "Вища школа", Киев.

[5] Й. Панева-Коновска, Т. Станчева (2014), *Ръководство по математически анализ 2 с помощта на MAPLE*, Технически университет – София, София.

[6] Г. Фихтенголц (1966), *Курс диференциального и интегрального исчисления*, том 1-3, "Наука", Москва.

[7] W.F. Trench (2012), *Introduction to real analysis,* San Antonio, Texas, USA,

(http: ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/TRENCH_REAL_ANALYSIS.PDF)

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ 2

Автор:
© доц. д-р Йорданка Панева-Коновска

Рецензент:
© доц. д-р Георги Пенчев Венков

Дизайн на графиките:
© Маргарита Коновска

Стилова редакция:
© Стояна Иванова Саева

Даден за печат: м. януари 2018 г.
Излязъл от печат: м. януари 2018 г.
Печатни коли: 10.50
Поръчка № 16 с
Цена 15.00 лв.

Формат 60/84/16
ISBN : 978-619-167-298-1

Издателство и печат - Техническия университет – София

гр. София, бул. Климент Охридски 8, тел. 02 965 22 26